Ingenieur-Mathematik I

Prof. W. Tischhauser

2002

Inhaltsverzeichnis

1 Mathematische Strukturen

1.1 Mengen

Der Begriff *Menge* ist ein mathematischer Grundbegriff, der sich nicht definieren lässt, wohl aber axiomatisch eingeführt werden kann. Wir begnügen uns hier mit dem intuitiven Mengenbegriff nach Cantor (deutscher Mathematiker, 1845 - 1918, Begründer der Mengenlehre):

Unter einer *Menge* M versteht man eine Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten zu einem Ganzen. Diese Objekte heißen *Elemente* der Menge M .

Wir schreiben:

$$\begin{array}{ll} x \in M & \text{, falls } x \text{ ein Element der Menge } M \text{ ist} \\ x \notin M & \text{, falls } x \text{ nicht Element der Menge } M \text{ ist} \end{array}$$

Eine Menge kann durch die Angabe aller Elemente beschrieben werden. Zum Beispiel kann die Menge der Dezimalziffern wie folgt angegeben werden: $M = \{0,1,2,3,9,8,7,6,5,4\}$.

Die Schreibweise

$$M = \{x \mid x \in G, Px\}$$

bedeutet, dass die Menge M aus allen Elementen x aus einer Grundmenge G besteht, die die Eigenschaft P (Prädikat) besitzen.

Beispiel 1.1

Definition 1.2: Eine Menge heißt *leer*, wenn sie kein Element enthält.

Schreibweise: $\{\}$ oder $\emptyset$.

■

Die folgenden Definitionen beschreiben Beziehungen zwischen Mengen.

Definition 1.3 (Teilmenge): Eine Menge A heißt *Teilmenge* einer Menge M, wenn jedes Element x, das zu A gehört, auch in M liegt:

$$A \subseteq M :\Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in M)$$

■

Definition 1.4 (Gleichheit von Mengen): Zwei Mengen A und B heißen gleich, wenn beide Mengen die gleichen Elemente x besitzen:

$$A = B :\Leftrightarrow (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

■

Beispiel 1.5

Satz 1.6: Die leere Menge $\emptyset$ ist Teilmenge jeder Menge.

■

Definition 1.7 (Potenzmenge): Die Menge $\mathfrak{P}(M)$ aller Teilmengen einer Menge M heißt die *Potenzmenge* von M.

■

Satz 1.8: Sei M eine endliche Menge und bezeichne $|M|$ die Anzahl der (endlich vielen) Elemente von M (Mächtigkeit von M). Dann gilt für die Anzahl der Elemente der Potenzmenge $\mathfrak{P}(M)$:

$$|\mathfrak{P}(M)| = 2^{|M|}$$

■

Beispiel 1.9

Die folgenden Definitionen stellen Verknüpfungen zwischen Mengen her.

Definition 1.10 (Durchschnitt, Vereinigung und Differenz von Mengen): A, B seien Mengen. Dann heissen

(a) die Menge derjenigen Elemente x, die zu A und zu B gehören, der *Durchschnitt* von A und B.

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

(b) die Menge derjenigen Elemente x, die zu A oder zu B gehören, die *Vereinigung* von A und B.

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

(c) die Menge derjenigen Elemente x, die zu A, jedoch nicht zu B gehören, die *Differenz* von A und B.

$$A \setminus B := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

■

Definition 1.11 (Komplement): Sei G eine Grundmenge für eine Menge A. Dann heißt die Differenzmenge $G \setminus A$ die Komplementärmenge $\overline{A}$ zu A.

$$\overline{A} := G \setminus A$$

■

Skizzen und Beispiele 1.12

Für die Mengenoperationen $\cap, \cup, \setminus$ gelten die beiden folgenden Sätze. Die darin aufgeführten Beziehungen eignen sich als Rechenregeln für Mengen.

Satz 1.13: Es seien A, B, C Mengen. Dann gelten:

(i) Kommutativgesetze:

$$\begin{aligned} A \cap B &= B \cap A \\ A \cup B &= B \cup A \end{aligned}$$

(ii) Assoziativgesetze:

$$\begin{aligned} A \cap (B \cap C) &= (A \cap B) \cap C \\ A \cup (B \cup C) &= (A \cup B) \cup C \end{aligned}$$

(iii) Distributivgesetze:

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned}$$

■

Satz 1.14 (DeMorgansche Regeln): Es seien A, B, C Mengen. Dann gelten:

(i)

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

(ii)

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$

■

Bemerkung 1.15: Die DeMorganschen Regeln lassen sich auch wie folgt formulieren:

(i)

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

(ii)

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

1.2 Relationen

Zusammenfasssungen von Objekten führen zu Mengen. Die Beziehungen zwischen den Objekten werden durch *Relationen* beschrieben.

Definition 1.16 (Kartesisches Produkt): Es seien A, B Mengen. Dann heißt die Menge aller Paare (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$ das *kartesische Produkt* (Produktmenge) der Mengen A und B:

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

■

Skizze 1.17

Beispiel 1.18

Definition 1.19 (Relation): Es seien A, B Mengen. Dann heißt eine nicht leere Teilmenge R von $A \times B$ eine (zweistellige) Relation (zwischen den Elementen von A und B):

$$R = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B \wedge Rab\}$$

■

Skizze 1.20

Beispiel 1.21

Bemerkung 1.22:

1. Für $(a, b) \in R$ ist auch die Schreibweise aRb oder bei einer konkret vorgegebenen Relation zum Beispiel: „$a < b$" oder „$a = b$" oder „$a \mid b$" (a ist Teiler von b) usw.

2. Eine Verallgemeinerung der Paarbildung zu $n - tupel$ (für $n = 3$ entsteht das Tripel (a, b, c), für $n = 4$ entsteht das Quadrupel (a, b, c, d)) ist ohne Schwierigkeiten möglich. Man erhält dann $n - stellige$ Relationen.

Die nächste Definition beschreibt Eigenschaften zweistelliger Relationen.

Definition 1.23 (Eigenschaften zweistelliger Relationen): Sei A eine Menge. Eine Relation $R \subseteq A \times A$ heißt

(a) *reflexiv*, wenn jedes $a \in A$ mit sich selbst in der Relation R steht:

$$R \text{ reflexiv } :\Leftrightarrow \underset{a \in A}{\forall} aRa$$

(b) *symmetrisch*, wenn bei Vertauschung von $a, b \in A$ die Relation R erhalten bleibt:

$$R \text{ symmetrisch } :\Leftrightarrow \underset{a \in A}{\forall} \underset{b \in A}{\forall} aRb \Rightarrow bRa$$

(c) *antisymmetrisch*, wenn für $a, b \in A$ mit $a \neq b$ nie aRb und bRa zugleich gilt:

$$R \; antisymmetrisch \; :\Leftrightarrow \underset{a\in A}{\forall} \; \underset{b\in A}{\forall} \; a \neq b \wedge aRb \Rightarrow \neg(bRa)$$

bzw. (andere Formulierung):

$$Rantisymmetrisch \; :\Leftrightarrow \underset{a\in A}{\forall} \; \underset{b\in A}{\forall} \; aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b$$

(d) *transitiv*, wenn für alle $a, b, c \in A$ aus aRb und bRc stets aRc folgt:

$$Rtransitiv \; :\Leftrightarrow \underset{a\in A}{\forall} \; \underset{b\in A}{\forall} \; \underset{c\in A}{\forall} \; aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$$

■

Skizze 1.24

Im folgenden werden zwei wichtige Relationen vorgestellt.

Definition 1.25 (Äquivalenzrelation): Eine reflexive, symmetrische und transitive Relation R heißt *Äquivalenzrelation.*

Zwei Elemente $a, b \in A$ sind *äquivalent* ($a \sim b$), wenn aRb :

$$a \sim b :\Leftrightarrow aRb \text{ und } R \text{ Äquivalenzrelation auf } A$$

Die zu einem Element $a \in A$ äquivalenten Elemente können zu einer *Äquivalenzklasse* $[a]$ zusammengefasst werden:

$$[a] = \{x \mid x \in A \wedge x \sim a\}$$

Dabei heißt a *Repräsentant* der Äquivalenzklasse $[a]$.

■

Beispiele 1.26

Definition 1.27 (Ordnungsrelation): Eine reflexive, antisymmetrische und transitive Relation R heißt *Ordnungsrelation.*

■

Beispiel 1.28

1.3 Abbildungen

Definition 1.29: Eine *Abbildung* $f : A \to B$ ist eine Vorschrift, die jedem Element $x \in A$ genau ein Element $f(x) \in B$ zuordnet. A wird als *Definitionsmenge* bezeichnet und als nicht leer vorrausgesetzt, B als *Zielmenge*. x heißt *Urbild*, $f(x)$ *Bild* von x bei der Abbildung f.

Die Menge aller Bilder heißt *Bildmenge* und wird mit $f[A]$ bezeichnet:

$$f[A] = \left\{ y \in B \mid \underset{x \in A}{\exists} f(x) = y \right\} \subseteq B$$

■

Bemerkung 1.30: Eine Abbildung f lässt sich auch mit Hilfe der Relationen definieren:

Eine Relation $f \subseteq A \times B$ heißt *Abbildung* (*Funktion*) von A in B genau dann, wenn gilt:

(i) Für alle $x \in A$ gibt es stets ein $y \in B$ mit xfy und

(ii) für alle $x, y, z \in B$ gilt:

$$xfy \wedge xfz \Rightarrow y = z$$

Abbildung und Funktion sind synonyme Begriffe.

Beispiel 1.31

Definition 1.32: Eine Abbildung $f : A \to B$ heißt

(a) *injektiv*, wenn zwei verschiedenen Urbilder auch zwei verschiedenen Bilder haben:

$$f \, \textit{injektiv} :\Leftrightarrow \underset{x_1 \in A}{\forall} \; \underset{x_2 \in A}{\forall} \; x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

(b) *surjektiv*, wenn jedes Bild mindestens ein Urbild hat:

$$f \, \textit{surjektiv} :\Leftrightarrow f[A] = B$$

(c) *bijektiv*, wenn f injektiv und surjektiv ist.

■

Beispiel 1.33

Man kann zwei Abbildungen hintereinanderschalten (verknüpfen, komponieren).

Definition 1.34 (Komposition zweier Abbildungen) Seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ zwei Abbildungen, so erklärt die Zuordnung $x \mapsto g(f(x))$ eine neue Abbildung $g \circ f : A \to C$. Die neue Abbildung $g \circ f$ heißt *Komposition* von f und g .
■

Skizze 1.35

Satz 1.36: Für die Komposition gilt das *Assoziativgesetz*, d. h. für die Abbildungen $f : A \to B, g : B \to C$ und $h : C \to D$ gilt:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

■

Bemerkung 1.37: Das Kommutativgesetz gilt nicht:

$$g \circ f \neq f \circ g$$

Satz 1.38 (Umkehrabbildung): Sei $f : A \to B$ eine bijektive Abbildung. Dann gibt es stets eine Umkehrabbildung (inverse Abbildung) $f^{-1} : B \to A$.

$$f^{-1}(y) = x \qquad y \in B, x \in A$$

Skizze 1.39

Es werden nun zwei wichtige algebraische Strukturen vorgestellt: Gruppen und Körper.

Definition 1.40 (Gruppe): Eine nicht leere Menge G mit einer inneren Verknüpfung $\circ : G \times G \to G$ heißt eine *Gruppe* $(G, \circ)$, wenn folgende Axiome gelten:

(G1) Assoziativgesetz:

$$\underset{a,b,c \in G}{\forall} (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$$

(G2) Existenz eines neutralen Elements e:

$$\underset{a \in G}{\forall} \underset{e \in G}{\exists} e \circ a = a$$

(G3) Existenz eines inversen Elements a^{-1}:

$$\underset{a \in G}{\forall} \underset{a^{-1} \in G}{\exists} a^{-1} \circ a = e$$

Gilt noch zusätzlich (G4), dann heißt $(G, \circ)$ *kommutative Gruppe* (auch *abelsche Gruppe*):

(G4) Kommutativgesetz:

$$\underset{a,b,c \in G}{\forall} a \circ b = b \circ a$$

■

Beispiele 1.41

Definition 1.42 (Körper): Eine nicht leere Menge K mit zwei inneren Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ heißt ein *Körper* $(K, +, \cdot)$, wenn folgende Axiome gelten:

(K1) $(K, +)$ ist eine Gruppe (mit dem neutralen Element 0).

(K2) $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine kommutative Gruppe (mit dem neutralen Element 1).

(K3) Distributivgesetze:

$$\begin{aligned} \underset{a,b,c \in K}{\forall} \; a \cdot (b + c) &= a \cdot b + \cdot a \cdot c \quad \text{und} \\ \underset{a,b,c \in K}{\forall} \; (a + b) \cdot c &= a \cdot c + \cdot b \cdot c \end{aligned}$$

■

Bemerkung 1.43: Die beiden Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ können allgemeiner aufgefasst werden. Befinden wir uns in den bekannten Zahlenräumen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, so handelt es sich bei $+$ und $\cdot$ um die „normale" Addition bzw. Multiplikation.

Beispiel 1.44 .

2 Vektorraum

2.1 Definition, Linearkombination, lineare Unabhängigkeit

Definition 2.1 (Vektorraum): Eine kommutative Gruppe $(V, +)$ heißt ein *Vektorraum* $(V, K, *)$ über einem Körper K , wenn eine Verknüpfung $* : K \times V \to V$ so gegeben ist, dass für alle $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in V$ (genannt Vektoren) und alle $\lambda, \mu \in K$ (genannt Skalare) die folgenden Axiome gelten:

(V1) Assoziativgesetz:

$$\lambda(\mu \overrightarrow{a}) = (\lambda\mu)\overrightarrow{a}$$

(V2) Distributivgesetze:

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu)\overrightarrow{a} &= \lambda \overrightarrow{a} + \mu \overrightarrow{a} \\ \lambda(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) &= \lambda \overrightarrow{a} + \lambda \overrightarrow{b} \end{aligned}$$

(V3) Eins-Gesetz:

$$1\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}$$

■

Bemerkung 2.2:

1. Die Verknüpfung $*$ wird *Skalarmultiplikation* genannt. Das Zeichen $*$ wird in den Formeln weggelassen.
2. Das Nullelement von $(V, +)$ wird als *Nullvektor* $\overrightarrow{0}$ bezeichnet.
3. Für $K = \mathbb{R}$ entsteht der *reelle Vektorraum,* für $K = \mathbb{C}$ entsteht der *komplexe Vektorraum.*
4. Der Vektorraum $(V, K, *)$ wird kürzer mit (V, K) oder noch kürzer mit V bezeichnet.

Definition 2.3 (Linearkombination) Seien $\overrightarrow{a_1}, ..., \overrightarrow{a_n}$ Vektoren aus dem Vektorraum V. Dann ist

$$\lambda_1 \overrightarrow{a_1} + ... + \lambda_n \overrightarrow{a_n} \qquad (\lambda_i \in \mathbb{K}, i = 1, ..., n)$$

eine *Linearkombination* der n Vektoren $\overrightarrow{a_1}, ..., \overrightarrow{a_n}$.

■

Bemerkung 2.4: Die Linearkombination $\overrightarrow{a} = \lambda_1 \overrightarrow{a_1} + ... + \lambda_n \overrightarrow{a_n}$ ist wiederum ein Vektor aus V.

Definition 2.5 (lineare Unabhängigkeit): n Vektoren $\overrightarrow{a_1}, ..., \overrightarrow{a_n}$ heißen *linear unabhängig (l. u.)*, wenn aus der Darstellung des Nullvektors

$$\lambda_1 \overrightarrow{a_1} + ... + \lambda_n \overrightarrow{a_n} = \overrightarrow{0} \qquad (\lambda_i \in \mathbb{K}, i = 1, ..., n)$$

stets

$$\lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$$

folgt. Linear abhängig heißen sie, wenn sie nicht l. u. sind.
■

2.2 Veranschaulichung von Vektoren, Vektoralgebra

Im folgenden sei ein reeller Vektorraum gegeben. Dessen Elemente, die *Vektoren*, sind durch Betrag und Richtung bestimmt. Ein Vektor ist somit durch einen Pfeil darstellbar. Die Länge des Pfeils stellt den Betrag und die Pfeilspitze stellt die Richtung dar.

Schreibweisen: $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{F}$ oder $\overrightarrow{PQ}$ (P und Q sind Anfangs- und Endpunkt des Vektors)

Skizze 2.6

Beispiele für Skalare und Vektoren:

1. Skalare (nur Betrag): Zeit t, Widerstand R, Temperatur T
2. Vektoren (Betrag und Richtung): Geschwindigkeit $\overrightarrow{v}$, Kraft $\overrightarrow{F}$, Elektrische Feldstärke $\overrightarrow{E}$

Spezielle Vektoren:

1. *Nullvektor* $\overrightarrow{0}$: Er hat den Betrag null und besitzt keine Richtung $\left(\left|\overrightarrow{0}\right| = 0\right)$
2. *Einheitsvektor* $\overrightarrow{e}$: Er hat den Betrag eins ($|\overrightarrow{e}| = 1$)
3. *Ortsvektor* $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{r}\,(P)$: Er führt vom Koordinatenursprung zum Punkt P

Definition 2.7:

1. Zwei Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ sind *gleich*, wenn sie in Betrag und Richtung übereinstimmen.
$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b}$$
2. Zwei Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ mit gleicher Richtung heißen *parallel* zueinander.
$$\overrightarrow{a} \uparrow\uparrow \overrightarrow{b}$$

3. Zwei Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ mit entgegengesetzter Richtung heißen *antiparallel* zueinander.

$$\overrightarrow{a} \uparrow\downarrow \overrightarrow{b}$$

Haben $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ den gleichen Betrag, so ist $\overrightarrow{b}$ der *inverse* Vektor (Gegenvektor) zu $\overrightarrow{a}$ und wird mit $-\overrightarrow{a}$ bezeichnet.

■

Beispiel 2.8

2.3 Vektoroperationen (Teil 1)

2.3.1 Addition von Vektoren

Seien $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ zwei Vektoren. Dann erhält man die Summe

$$\overrightarrow{s} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$$

wie folgt:

Skizze 2.9

Es gelten die folgenden Gesetze:

(i) Kommutativgesetz:

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}$$

(ii) Assoziativgesetz:

$$\overrightarrow{a} + \left(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right) = \left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) + \overrightarrow{c}$$

2.3.2 Subtraktion von Vektoren

Die Subtraktion von Vektoren wird auf die Addition zurückgeführt.

Seien $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ zwei Vektoren. Dann erhält man die Differenz

$$\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} + \left(-\overrightarrow{b}\right)$$

wie folgt:

Skizze 2.10

Geometrische Deutung der Addition und Subtraktion als Parallelogramm:

Skizze 2.11

Beispiel 2.12

2.3.3 Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar

Durch Multiplikation eines Vektors $\vec{a}$ mit einer reellen Zahl λ (Skalar) entsteht ein Vektor $\vec{b}$ mit folgenden Eigenschaften:

$$\vec{b} = \lambda \vec{a} \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

(i) Für den *Betrag* gilt:

$$\left|\vec{b}\right| = |\lambda \vec{a}| = |\lambda|\,|\vec{a}|$$

(ii) Für die *Richtung* gilt:

$$\begin{array}{lll} \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b} & \text{für } \lambda > 0 & \text{(parallel)} \\ \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b} & \text{für } \lambda < 0 & \text{(antiparallel)} \end{array}$$

(iii) Für $\lambda = 0$ erhält man den Nullvektor $\vec{0}$.

Beispiel 2.13

2.3.4 Skalarprodukt zweier Vektoren

Definition 2.14: Seien $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zwei Vektoren. Dann heißt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos \sphericalangle \left(\vec{a}, \vec{b}\right) \qquad \text{mit } 0^\circ \leq \sphericalangle \left(\vec{a}, \vec{b}\right) \leq 180^\circ$$

das *Skalarprodukt* (inneres Produkt) der beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

■

Bemerkung 2.15:

1. Das Skalarprodukt ist eine skalare Größe.
2. Schreibweise für $\vec{a} \cdot \vec{b}$ auch $\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$.

Es gelten die folgenden Gesetze:

(i) Kommutativgesetz:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

(ii) Distributivgesetz:

$$\vec{a} \cdot \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

(iii) Für einen beliebigen Skalar λ:

$$\lambda \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = (\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \left(\lambda \vec{b}\right)$$

Seien $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zwei vom Nullvektor verschiedene Vektoren und $\varphi = \sphericalangle \left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 90^\circ$. Dann stehen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht aufeinander und es gilt $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ (da $\cos 90^\circ = 0$).

Es gilt

Satz 2.16: Zwei vom Nullvektor verschiedene Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ sind *orthogonal* genau dann, wenn ihr Skalarprodukt gleich null ist:

$$\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b} \Leftrightarrow \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0$$

■

Bemerkung 2.17:

1. Es gibt kein skalares Produkt mit mehr als 2 Faktoren: $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c}$ ist sinnlos! Sinnvoll dagegen ist z. B. $\left(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{c}$.

2. Aus der Definition 2.10 folgt sofort

$$\varphi = \arccos \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}| \left|\overrightarrow{b}\right|}$$

2.3.5 Vektorprodukt zweier Vektoren

Definition 2.18: Seien $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ zwei Vektoren. Dann versteht man unter einem *Vektorprodukt* (äußeres Produkt, Kreuzprodukt)

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{c}$$

den Vektor $\overrightarrow{c}$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $|\overrightarrow{c}| = |\overrightarrow{a}| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right| \cdot \sin \sphericalangle \left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)$ mit $0° \leq \sphericalangle \left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) \leq 180°$

(ii) $\overrightarrow{c}$ steht senkrecht auf der von $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ aufgespannten Ebene, also

$$\begin{array}{ll} \overrightarrow{c} \perp \overrightarrow{a} & \text{, d. h. } \overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{a} = 0 \\ \overrightarrow{c} \perp \overrightarrow{b} & \text{, d. h. } \overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{b} = 0 \end{array}$$

(iii) $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ bilden in dieser Reihenfolge eine Rechtsschraubung (rechtshändiges System).

Skizze 2.19

■

Bemerkung 2.20:

1. Das Vektorprodukt ist eine vektorielle Größe.

2. Schreibweise für $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ auch $\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right]$.

Es gelten die folgenden Gesetze:

(i) Anti-Kommutativgesetz:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\left(\vec{b} \times \vec{a}\right)$$

(ii) Distributivgesetze:

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$
$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$$

(iii) Für einen beliebigen Skalar λ:

$$\lambda\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \left(\lambda\vec{a}\right) \times \vec{b} = \vec{a} \times \left(\lambda\vec{b}\right)$$

Seien $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zwei vom Nullvektor verschiedene Vektoren und $\varphi = \sphericalangle\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 0°$ oder $\varphi = 180°$. Dann sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ parallel oder antiparallel (d. h. kollinear) zueinander und es gilt $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

Satz 2.21: Zwei vom Nullvektor verschiedene Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind *parallel oder antiparallel* genau dann, wenn ihr Vektorprodukt gleich null ist:

$$\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b} \text{ oder } \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$$

■

Bemerkung 2.22:

1. Geometrische Bedeutung des Vektorproduktes: Der Betrag des Vektorproduktes $\vec{a} \times \vec{b}$ entspricht dem Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.
   Skizze 2.23
2. $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$ (da $\varphi = 0°$, also $\sin\varphi = 0$).

2.4 Komponentendarstellung eines Vektors (Basisdarstellung)

Die Komponentendarstellung soll im 3-dimensionalen reellen Vektorraum eingeführt werden. Eine Verallgemeinerung auf den n-dimensionalen Vektorraum ist ohne Einschränkung möglich (auch $n = 2$, Ebene). Folgendes Koordinatensystem wird zugrunde gelegt:

Skizze 2.24

Es stellt ein sogenanntes *Orthonormalsystem* dar, d. h. die Vektoren eines Orthonormalsystems sind orthogonal (stehen senkrecht aufeinander) und sind normiert (auf die Länge 1).

Zerlegung eines vom Nullpunkt ausgehenden Vektors $\vec{a}$ in seine Komponenten:
Skizze 2.25

$\vec{a_x}$, $\vec{a_y}$, $\vec{a_z}$ sind die Vektorkomponenten von $\vec{a}$. Sie werden auch als Projektionen auf die einzelnen Koordinatenachsen bezeichnet.

Es gilt
$$\vec{a} = \vec{a_x} + \vec{a_y} + \vec{a_z}$$
Mit $\vec{a_x} = a_x \vec{e_x}$, $\vec{a_y} = a_y \vec{e_y}$, $\vec{a_z} = a_z \vec{e_z}$ erhält man
$$\vec{a} = a_x \vec{e_x} + a_y \vec{e_y} + a_z \vec{e_z}$$
Die skalaren Größen a_x, a_y, a_z werden als Vektorkoordinaten (skalare Vektorkomponenten) bezeichnet. Sie können als Spaltenvektor dargestellt werden:
$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$
Wir können als *Komponentendarstellung* eines Vektors festhalten:
$$\vec{a} = \vec{a_x} + \vec{a_y} + \vec{a_z} = a_x \vec{e_x} + a_y \vec{e_y} + a_z \vec{e_z} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

Bemerkung 2.26: Fällt ein Projektionsvektor in die Gegenrichtung, so ist seine Vektorkoordinate negativ.

Ist ein Vektor durch seinen Anfangspunkt $P_1\,(x_1, y_1, z_1)$ und seinen Endpunkt $P_2\,(x_2, y_2, z_2)$ festgelegt, so lautet seine Komponentendarstellung
$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\,\vec{e_x} + (y_2 - y_1)\,\vec{e_y} + (z_2 - z_1)\,\vec{e_z} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$$
Es folgen Komponentendarstellungen einiger spezieller Vektoren:

1. Nullvektor $\vec{0}$:
$$\vec{0} = 0\vec{e_x} + 0\vec{e_y} + 0\vec{e_z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Einheitsvektoren (Basisvektoren) $\vec{e_x}$, $\vec{e_y}$, $\vec{e_z}$:
$$\vec{e_x} = 1\vec{e_x} + 0\vec{e_y} + 0\vec{e_z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\vec{e_y} = 0\vec{e_x} + 1\vec{e_y} + 0\vec{e_z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\vec{e_z} = 0\vec{e_x} + 0\vec{e_y} + 1\vec{e_z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. Ortsvektor $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{r}\,(P)$ mit $P\,(x, y, z)$:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{r}\,(P) = x\overrightarrow{e_x} + y\overrightarrow{e_y} + z\overrightarrow{e_z} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

2.4.1 Betrag und Gleichheit

Der *Betrag* eines Vektors $\overrightarrow{a}$ errechnet sich unter Verwendung des Satzes von Pythagoras wie folgt:

$$|\overrightarrow{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \qquad \text{(Betrag von } \overrightarrow{a}\text{)}$$

Zwei Vektoren $\overrightarrow{a} = a_x\overrightarrow{e_x} + a_y\overrightarrow{e_y} + a_z\overrightarrow{e_z} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{b} = b_x\overrightarrow{e_x} + b_y\overrightarrow{e_y} + b_z\overrightarrow{e_z} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$ sind *gleich,* wenn sie gleiche entsprechende Koordinaten haben:

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b} \Leftrightarrow a_x = b_x \wedge a_y = b_y \wedge a_z = b_z \qquad \text{(Gleichheit)}$$

2.4.2 Vektoroperationen in Komponentendarstellung

Es seien zwei Vektoren $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$ gegeben.

Addition von Vektoren: Die Addition erfolgt koordinatenweise:

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix}$$

Beispiel 2.27

Subtraktion von Vektoren: Die Subtraktion erfolgt koordinatenweise:

$$\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x - b_x \\ a_y - b_y \\ a_z - b_z \end{pmatrix}$$

Beispiel 2.28

Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar: Die Multiplikation mit einem Skalar $k \in \mathbb{R}$ erfolgt koordinatenweise:

$$k\overrightarrow{a} = k\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_x \\ ka_y \\ ka_z \end{pmatrix}$$

Beispiel 2.29

Skalarprodukt zweier Vektoren: Das Skalarprodukt zweier Vektoren kann man direkt aus den Vektorkoordinaten berechnen:

Berechnung 2.30

Das Skalarprodukt zweier Vektoren wird wie folgt berechnet:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos \sphericalangle \left(\vec{a}, \vec{b}\right) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \qquad \text{(Skalarprodukt)}$$

Hieraus kann der Winkel $\varphi = \sphericalangle \left(\vec{a}, \vec{b}\right)$ zwischen den beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bestimmt werden:

$$\varphi = \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|} = \arccos \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

Beispiel 2.31

Vektorprodukt zweier Vektoren: Das Vektorprodukt zweier Vektoren kann man direkt aus den Vektorkoordinaten berechnen:

Berechnung 2.32

Das Vektorprodukt zweier Vektoren wird wie folgt berechnet:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \qquad \text{(Vektorprodukt)}$$

Beispiel 2.33

Bemerkung 2.34

2.5 Vektoroperationen (Teil 2)

2.5.1 Das Spatprodukt

Definition 2.35 (Spatprodukt): Das Spatprodukt $\left[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right]$ dreier Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ist wie folgt definiert:

$$\left[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right] = \vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$$

■

Bemerkung 2.36:

1. Das Spatprodukt ist eine skalare Größe.
2. Das Spatprodukt heißt auch *gemischtes Produkt* (da beide Multiplikationen, skalare und vektorielle vorkommen). Auch: skalares Dreierprodukt.
3. Bilden die 3 Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem, so ist das Spatprodukt positiv. Bilden sie ein Linkssystem, ist es negativ.

Regeln:

1. Werden die 3 Vektoren $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ zyklisch vertauscht, so ändert sich das Spatprodukt nicht. Es gilt:

$$\left[\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}\right] = \left[\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}\,\overrightarrow{a}\right] = \left[\overrightarrow{c}\,\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\right]$$

2. Vertauscht man 2 Vektoren, so ändert das Spatprodukt sein Vorzeichen. Es gilt z. B.:

$$\left[\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}\right] = -\left[\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{c}\,\overrightarrow{b}\right] \qquad \text{usw.}$$

■

Liegen die 3 Vektoren $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ in einer gemeinsamen Ebene, so heißen sie *komplanar.*

Skizze 2.37

Es gilt

Satz 2.38: Drei vom Nullvektor verschiedene Vektoren $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ und $\overrightarrow{c}$ sind *komplanar* genau dann, wenn ihr Spatprodukt gleich null ist:

$$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \text{ sind komplanar} \Leftrightarrow \left[\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}\right] = 0$$

■

Das Spatprodukt dreier Vektoren läßt sich aus den Vektorkoordinaten berechnen:

Berechnung 2.39

Also

$$\left[\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}\right] = \overrightarrow{a} \cdot \left(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}\right) = a_x\left(b_y c_z - b_z c_y\right) + a_y\left(b_z c_x - b_x c_z\right) + a_z\left(b_x c_y - b_y c_x\right)$$

Bemerkung 2.40

Bemerkung 2.41

3 Matrizen

3.1 Definition einer Matrix

Definition 3.1: Das folgende rechteckige Schema mit m Zeilen und n Spalten $(m, n \in \mathbb{N})$ heißt *Matrix* A vom Typ (m, n):

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1k} & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2k} & . & . & a_{2n} \\ . & . & & & . & & & . \\ . & . & & & . & & & . \\ a_{i1} & a_{i2} & . & . & a_{ik} & . & . & a_{in} \\ . & . & & & . & & & . \\ . & . & & & . & & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & a_{mk} & . & . & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Dabei sind die a_{ik} die *Matrixelemente* $(i = 1, ..., m; k = 1, ..., n)$. Für $a_{ik} \in \mathbb{R}$ liegen *reelle* Matrizen, für $a_{ik} \in \mathbb{C}$ *komplexe* Matrizen vor.

Bemerkung 3.2:

1. Eine Matrix liefert *kein* Zahlenwert.
2. Weitere Bezeichnungen für eine Matrix A vom Typ (m, n) :
   (a) mit Typbezeichung: $A_{(m,n)}$, $(a_{ik})_{(m,n)}$
   (b) ohne Typbezeichung: A, (a_{ik})

Spezielle Matrizen:

1. *Quadratische Matrix* (n-ter Ordnung, n-reihig): Hier ist $m = n$.

$$A = A_{(n,n)} = \begin{pmatrix} a_{11} & . & . & a_{1n} \\ . & & & . \\ . & & & . \\ a_{n1} & . & . & a_{nn} \end{pmatrix}$$

2. *Zeilenmatrix*: Hier ist $m = 1$.

$$A = A_{(1,n)} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & . & . & a_n \end{pmatrix}$$

   Wird auch als Zeilenvektor bezeichnet (vergleiche Komponentendarstellung eines Vektors).

3. *Spaltenmatrix*: Hier ist $n = 1$.

$$A = A_{(m,1)} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ a_m \end{pmatrix}$$

   Wird auch als Spaltenvektor bezeichnet.

4. *Nullmatrix*: Hier sind alle $a_{ik} = 0$.

$$A = 0 = \begin{pmatrix} 0 & . & . & 0 \\ . & & & . \\ . & & & . \\ 0 & . & . & 0 \end{pmatrix}$$

Definition 3.3: Zwei Matrizen $A = (a_{ik})$ und $B = (b_{ik})$ sind *gleich*, wenn sie vom gleichen Typ sind und

$$a_{ik} = b_{ik} \qquad \text{für alle } a_{ik}, b_{ik}$$

gilt.

■

Definition 3.4: Vertauscht man in einer Matrix A die Zeilen mit den Spalten, so erhält man die *Transponierte* A^T der Matrix A.

■

Beispiel 3.5

3.2 Spezielle quadratische Matrizen

1. *Diagonalmatrix*: Alle Elemente außerhalb der Hauptdiagonalen sind gleich null:

$$a_{ik} = 0 \qquad \text{für } i \neq k$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & . & . & 0 \\ 0 & a_{22} & . & . & 0 \\ . & . & & & . \\ . & . & & & . \\ 0 & 0 & . & . & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Sonderfall: Haben die Hauptdiagonalelemente einer Diagonalmatrix den Wert 1 , so handelt es um die *Einheitsmatrix*:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 1 & . & . & 0 \\ . & . & & & . \\ . & . & & & . \\ 0 & 0 & . & . & 1 \end{pmatrix} \qquad (n\text{-reihig})$$

2. *Dreiecksmatrix*: Alle Elemente oberhalb bzw. unterhalb der Hauptdiagonalen sind gleich null:

$$U = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & . & . & 0 \\ a_{21} & a_{22} & . & . & 0 \\ . & . & & & . \\ . & . & & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \text{es gilt: } a_{ik} = 0 \quad \text{für } i < k \quad \text{(Untere Dreiecksmatrix)}$$

$$O = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & . & . & a_{2n} \\ . & . & & & . \\ . & . & & & . \\ 0 & 0 & . & . & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \text{es gilt: } a_{ik} = 0 \quad \text{für } i > k \qquad \text{(Obere Dreiecksmatrix)}$$

3. *Symmetrische Matrix*: Die Matrixelemente liegen spiegelsymmetrisch zur Hauptdiagonalen, d. h. es gilt

$$a_{ik} = a_{ki} \qquad \text{für alle } i, k$$

Beispiel 3.6
Bemerkung 3.7: Für eine symmetrische Matrix gilt immer

$$A^T = A$$

4. *Schiefsymmetrische Matrix*: Hier gilt

$$a_{ik} = -a_{ki} \qquad \text{für alle } i, k$$

Hieraus folgt sofort:

$$a_{ii} = 0$$

Beispiel 3.8
Bemerkung 3.9: Für eine schiefsymmetrische Matrix gilt immer

$$A^T = -A$$

3.3 Matrixoperationen

3.3.1 Addition von Matrizen

Definition 3.10: Zwei Matrizen $A = (a_{ik})$ und $B = (b_{ik})$ vom gleichen Typ (m, n) werden *addiert*, indem man die positionsgleichen Matrizenelemente addiert.

$$C = A + B = (c_{ik}) \quad \text{mit } c_{ik} = a_{ik} + b_{ik} \quad (i = 1, ...m; k = 1, ...n)$$

C heißt die *Summe* von A und B und ist auch vom Typ (m, n).
■
Es gelten folgende Gesetze:

(i) Kommutativgesetz:

$$A + B = B + A$$

(ii) Assoziativgesetz:

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

Beispiel 3.11

3.3.2 Subtraktion von Matrizen

Definition 3.12: Zwei Matrizen $A = (a_{ik})$ und $B = (b_{ik})$ vom gleichen Typ (m, n) werden *subtrahiert*, indem man die positionsgleichen Matrizenelemente subtrahiert.

$$D = A - B = (d_{ik}) \quad \text{mit } d_{ik} = a_{ik} - b_{ik} \quad (i = 1, ...m; k = 1, ...n)$$

D heißt die *Differenz* von A und B und ist auch vom Typ (m, n).

■

Beispiel 3.13

3.3.3 Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar

Definition 3.14: Eine Matrix $A = (a_{ik})$ vom Typ (m, n) wird mit einem reellen Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ *multipliziert*, indem jedes Matrixelement a_{ik} mit dem Skalar λ multipliziert wird.

$$\lambda A = \lambda (a_{ik}) = (\lambda a_{ik}) \quad (i = 1, ...m; k = 1, ...n)$$

λA heißt das *Produkt* von A mit λ und ist auch vom Typ (m, n).

■

Seien λ, μ reelle Skalare und A und B Matrizen vom gleichen Typ. Dann gelten folgende Gesetze:

(i) Assoziativgesetz:

$$\lambda (\mu A) = (\lambda \mu) A$$

(ii) Distributivgesetze:

$$(\lambda + \mu) A = \lambda A + \mu A$$

$$\lambda (A + B) = \lambda A + \lambda B$$

Beispiel 3.15

3.3.4 Multiplikation von Matrizen

Definition 3.16: Es seien $A = (a_{ik})$ eine Matrix vom Typ (m, n) und $B = (b_{ik})$ eine Matrix vom Typ (n, p). Dann heißt die Matrix C

$$C = A \cdot B = (c_{ik}) \quad \text{mit } c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk} \quad (i = 1, ...m; k = 1, ...p)$$

das *Produkt* der Matrizen A und B. Die Matrix C ist dann vom Typ (m, p).

■

Es gelten folgende Gesetze:

(i) Assoziativgesetz:

$$A (BC) = (AB) C$$

(ii) Distributivgesetze:

$$A\,(B+C) = AB + AC$$
$$(A+B)\,C = AC + BC$$

(iii) Für einen Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\lambda\,(AB) = (\lambda A)\,B = A\,(\lambda B)$$

(iv) Für transponierte Matrizen gilt:

$$(AB)^T = B^T A^T$$

(v) Für die Einheitsmatrix E gilt:

$$AE = EA = A$$

(vi) Für die Nullmatrix 0 gilt:

$$A0 = 0A = 0$$

Bemerkung 3.17: Das Kommutativgesetz gilt nicht: $AB \neq BA$!

Beispiel 3.18
Wir sehen, dass die Produktbildung nicht ganz einfach ist. Das folgende Schema nach *Falk* soll die praktische Berechnung unterstützen.

Skizze 3.19 (Das Falk-Schema)

Beispiel 3.20

3.4 Reguläre Matrix, inverse Matrix, orthogonale Matrix

Definition 3.21: Eine n-reihige quadratische Matrix A heißt *regulär,* wenn gilt:

$$\det A \neq 0$$

Kurz:

$$A \text{ regulär } \Leftrightarrow \det A \neq 0$$

Für $\det A = 0$ heißt die Matrix A *singulär.*
■

Definition 3.22: Sei A eine reguläre (quadratische) Matrix. Dann ist die zu A *inverse* Matrix A^{-1} wie folgt definiert:

$$A^{-1} := \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & . & . & A_{n1} \\ . & & & . \\ . & & & . \\ A_{1n} & . & . & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Dabei sind die A_{ik} die Adjunkte der Elemente a_{ik} der Matrix $A = (a_{ik})$.

■

Es gilt:

$$A \cdot A^{-1} = E \qquad \text{mit } E\text{: Einheitsmatrix}$$

Bemerkung 3.23:

1. A und A^{-1} sind kommutativ.
2. A^{-1} heißt auch Kehrmatrix oder Umkehrmatrix.
3. Die Berechnung von A^{-1} erfordert eine hohen Rechenaufwand. Ein praktisches Verfahren ist das Gauß-Jordan-Verfahren, das auf dem Gaußschen Algorithmus basiert.

Beispiel 3.24

Definition 3.25: Eine n-reihige quadratische Matrix A heißt *orthogonal,* wenn gilt:

$$A \cdot A^T = E$$

d. h. wenn das Matrizenprodukt aus A und ihrer Transponierten A^T die Einheitsmatrix E ergibt.

■

Eigenschaften einer *orthogonalen* Matrix A :

1. Die Zeilen- und Spaltenvektoren bilden je ein *Orthonormalsystem*, d. h. die Zeilenvektoren (bzw. Spaltenvektoren) stehen senkrecht aufeinander und haben die Länge 1, d. h. es gilt:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} a_{kj} = \begin{Bmatrix} 1 & \text{für } i = k \\ 0 & \text{für } i \neq k \end{Bmatrix}$$

2. Es gilt entweder $\det A = +1$ oder $\det A = -1$. Hieraus folgt insbesondere, dass eine *orthogonale* Matrix stets *regulär* ist. Die Umkehrung gilt i. a. nicht: $\det A = \pm 1 \nRightarrow A$ orthogonal!
3. Für die inverse Matrix A^{-1} einer orthogonalen Matrix A gilt:

$$A^{-1} = A^T$$

4. Das Produkt zweier orthogonaler Matrizen ist wieder eine orthogonale Matrix.

Bemerkung 3.26: Die Einheitsmatrizen sind orthogonal.

3.5 Rang einer Matrix

Definition 3.27: Die Maximalzahl linear unabhängiger Zeilen oder Spalten einer Matrix A heißt der *Rang* der Matrix A.

$$RangA = rgA = r \Longleftrightarrow \begin{array}{l} r \text{ Zeilen oder Spalten sind linear unabhängig und} \\ r+1 \text{ Zeilen oder Spalten sind linear abhängig} \end{array}$$

■

Elementare Umformungen, die den Rang einer Matrix *nicht* ändern, die sog. *ranginvarianten Operationen*, sind:

(i) Vertauschen zweier Zeilen (Spalten)

(ii) Multiplikation einer Zeile (Spalte) mit einem reellen Faktor $\lambda \neq 0$.

(iii) Addition einer mit $\lambda \neq 0$ multiplizierten Zeile (Spalte) zu einer anderen Zeile (Spalte).

Praktische Rangbestimmung (zugrunde liegt der Gaußsche Algorithmus):
Die Matrix A wird mit Hilfe der ranginvarianten Operationen auf die folgende Normalform A^* gebracht.

$$A^* = \begin{pmatrix} a^*_{11} & a^*_{12} & \cdot\ \cdot & a^*_{1r} & a^*_{1,r+1} & \cdot\ \cdot & a^*_{1n} \\ 0 & a^*_{22} & \cdot\ \cdot & a^*_{2r} & a^*_{2,r+1} & \cdot\ \cdot & a^*_{2n} \\ \cdot & & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & & & a^*_{rr} & a^*_{r,r+1} & & a^*_{rn} \\ 0 & 0 & \cdot\ \cdot & 0 & 0 & \cdot\ \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot\ \cdot & 0 & 0 & \cdot\ \cdot & 0 \end{pmatrix} \qquad (a^*_{ii} \neq 0 \quad \text{für } i = 1, \ldots r)$$

Rang A = Anzahl r der nicht verschwindenen Zeilen (Spalten) (Rang $A = r$).

Beispiel 3.28

Bemerkung 3.29: Die Vorgehensweise des vorigen Beispiels 3.28 ist immer möglich, eventuell ist ein Zeilen- oder Spaltentausch erforderlich.

4 Determinanten

4.1 Definition einer Determinante

Definition 4.1: Der Zahlenwert D einer n-reihigen quadratischen Matrix $A = (a_{ik})$ heißt n-reihige *Determinante* (n-ter Ordnung):

$$D = D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2n} \\ . & . & & & . \\ . & . & & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & a_{nn} \end{vmatrix} = \det A = |A| = |a_{ik}| \qquad (a_{ik} \in \mathbb{R}, D \in \mathbb{R})$$

D ist ein Skalar.

■

Wie berechnet man den Zahlenwert D ?

Sei zunächst n = 2. Dann haben wir eine 2-reihige Determinante und der Zahlenwert wird wie folgt berechnet:

$$D = D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Der Wert einer 2-reihige Determinante ist gleich dem Produkt der beiden Hauptdiagonalelemente minus dem Produkt der Nebendiagonalelemente.

Beispiel 4.2

Nun sei n = 3. Eine 3-reihige Determinante läßt sich nach der Regel von *Sarrus* berechnen. Dabei ist zu beachten, dass die Regel von Sarrus nur für 3-reihige Determinante gilt.

$$D = D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Skizze 4.3

Beispiel 4.4

n-reihige Determinaten ($n > 2$) werden zur Berechnung auf $(n-1)$-reihige *Unterdeterminanten* zurückgeführt.

Definition 4.5: Streicht man in einer n-reihigen Determinaten ($n > 2$) die Elemente der i-ten Zeile und der k-ten Spalte, so heißt das verbleibende quadratische Zahlenschema *Unterdeterminante* U_{ik} ($(n-1)$-reihig). Weiter definieren wir

$$A_{ik} \cdot = (-1)^{i+k} U_{ik}$$

als *Adjunkte* von a_{ik} (auch: adjungierte Unterdeterminante, algebraisches Komplement von a_{ik}).

■

Beispiel 4.6

Mit dem *Laplaceschen Entwicklungssatz* läßt sich eine n-reihige Determinaten wie folgt berechnen.

Satz 4.7 (Laplacescher Entwicklungssatz): Eine n-reihige Determinate D_n wird berechnet, indem man die Summe der Produkte aus den Elementen einer Zeile (bzw. Spalte) und den zugehörigen Adjunkten bildet:
Entwicklung von D_n nach der i-ten Zeile $(1 \leq i \leq n)$:

$$D_n = \sum_{\rho=1}^{n} a_{i\rho} A_{i\rho} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + ... + a_{in}A_{in}$$

bzw.
Entwicklung von D_n nach der k-ten Spalte $(1 \leq k \leq n)$:

$$D_n = \sum_{\rho=1}^{n} a_{\rho k} A_{\rho k} = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + ... + a_{nk}A_{nk}$$

■

Beispiel 4.8

4.2 Eigenschaften von Determinanten

1. Die Determinante einer Matrix A und die Determinante der transponierten Matrix A^T sind gleich:

   $$|A| = \left|A^T\right| \qquad \text{oder: } \det A = \det A^T$$

   Diese Eigenschaft läßt sich leicht für $n = 2$ zeigen. Wichtige Folgerung: Alle Sätze über Determinanten, die sich auf *Zeilen* beziehen, gelten sinngemäß auch für *Spalten*.

2. Sei B die Matrix, die man aus einer Matrix A erhält, wenn man

   (a) eine beliebige Zeile (bzw. Spalte) von A mit einem Skalar λ multipliziert. Dann gilt:

   $$|B| = \lambda |A|$$

   (b) zwei Zeilen (bzw. Spalten) von A miteinander vertauscht. Dann gilt:

   $$|B| = -|A|$$

   (c) ein Vielfaches einer Zeile (bzw. Spalte) von A zu einer anderen Zeile (bzw. Spalte) von A addiert. Dann gilt:

   $$|B| = |A|$$

3. Eine Determinante besitzt den Wert *null*, wenn sie eine (oder mehrere) der folgenden Bedingungen erüllt:
   (a) Alle Elemente *einer* Zeile (bzw. Spalte) sind gleich null.
   (b) Eine Zeile (bzw. Spalte) ist als Linearkombination der übrigen (nicht notwendig aller) Zeilen (bzw. Spalten) darstellbar. Unter einer Linearkombination von n Zeilenvektoren (bzw. Spaltenvektoren)versteht man folgenden Ausdruck:

$$\lambda_1 \overrightarrow{a_1} + \lambda_2 \overrightarrow{a_2} + ... + \lambda_n \overrightarrow{a_n}$$

   Insbesondere gilt dies für 2 gleiche Zeilen (bzw. Spalten) und für 2 proportionale Zeilen (bzw. Spalten).

4. Die Determinante einer n-reihigen *Dreiecksmatrix* A besitzt den Wert.

$$|A| = \det A = a_{11}a_{22}...a_{nn}$$

   D. h. $|A|$ ist gleich dem Produkt der Hauptdiagonalelemente. Insbesondere gilt:

$$|E| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & . & 0 \\ 0 & 1 & . & 0 \\ . & . & & . \\ 0 & 0 & . & 1 \end{vmatrix} = 1$$

5. *Multiplikationstheorem für Determinanten*: Die Determinante eines Matrizenproduktes zweier quadratischer Matrizen $A \cdot B$ ist gleich dem Produkt der Determinanten der einzelnen Faktoren A und B. Es gilt:

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

Beispiele 4.9

5 Lineare Gleichungssysteme

Wir untersuchen das lineare Gleichungssystem

$$A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b} \quad \text{mit} \quad A = A_{(m,n)} \qquad \text{Matrix mit } m \text{ Zeilen und } n \text{ Spalten}$$

$$\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \text{Spaltenvektor mit } n \text{ Komponenten}$$

$$\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix} \qquad \text{Spaltenvektor mit } m \text{ Komponenten}$$

auf folgende Fragen:

1. Unter welchen Bedingungen ist es lösbar?
2. Wann sind die Lösungen eindeutig?
3. Wie findet man die Lösungen?

Definition 5.1: Das lineare Gleichungssystem heißt *homogen*, wenn $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$ ist. Für $\overrightarrow{b} \neq \overrightarrow{0}$ liegt ein *inhomogenes* Gleichungssystem vor.
■

5.1 Homogene lineare Gleichungssysteme

Hier ist

$$A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$$

Satz 5.2:

1. Ein *homogenes lineares Gleichungssystem* besitzt stets die triviale Lösung $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$.
2. Für $RangA < n$ existieren noch (außer der trivialen Lösung) nicht-triviale Lösungen (und nur dann) und zwar besitzt das homogene lineare Gleichungssystem in diesem Fall ein Fundamentalsystem von $n-r$ ($r = RangA$) linear unabhängige Lösungen. Jede Lösung des homogenen linearen Gleichungssystems ist eine Linearkombination des Fundamentalsystems (bestimmt durch $n-r$ Parametern).

■
Dazu noch die

Definition 5.3: Eine Menge nicht-trivialer Lösungsvektoren des homogenen Systems heißt *Fundamentalsystem*, wenn jede Lösung des homogenen Systems eine eindeutige Linearkombination von Vektoren dieser Menge ist.
■

Für $m = n$ liegt der Spezialfall eines *quadratischen* linearen Gleichungsstems vor. Hier läßt sich $\det A$ bilden und es gilt:

Satz 5.4: Sei $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ ein homogenes lineares quadratisches Gleichungssystem (mit $A = A_{(n,n)}$, d. h. n Gleichungen mit n Unbekannten). Dann gilt:

(i) Ist A *regulär* (d. h. $\det A \neq 0$), so besitzt das Gleichungssystem genau eine Lösung $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ (die triviale Lösung).

(ii) Ist A *singulär* (d. h. $\det A = 0$), so besitzt das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen mit $n - r$ Parametern ($r = RangA$) (die triviale Lösung $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ ist auch darunter).

■

Beispiel 5.5

Beispiel 5.6

5.2 Inhomogene lineare Gleichungssysteme

Um eine Antwort auf die 3 Fragen geben zu können, müssen wir zunächst den Begriff der *erweiterten Matrix* einführen.

Definition 5.5: Sei $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ ein inhomogenes lineares Gleichungssystem. Durch Hinzufügen von $\overrightarrow{b}$ als $(n+1)$-te Spalte von A entsteht dann die sogenannte *erweiterte Matrix* $\left(A, \overrightarrow{b}\right)$.

■

Satz 5.6: Jedes inhomogene lineare Gleichungssystem $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ ist genau für

$$RangA = Rang\left(A, \overrightarrow{b}\right)$$

lösbar.

■

Satz 5.7 (über die Gesamtheit der Lösungen): Ein inhomogenes lineares Gleichungssystem $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ besitzt

für $RangA \neq Rang\left(A, \overrightarrow{b}\right)$ keine Lösung,

für $RangA = Rang\left(A, \overrightarrow{b}\right) = r = n$ genau eine Lösung,

für $RangA = Rang\left(A, \overrightarrow{b}\right) = r < n$ als Gesamtheit der Lösungen alle Linearkombinationen

$$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x_0} + \lambda_1\overrightarrow{x_1} + ... + \lambda_{n-r}\overrightarrow{x_{n-r}}$$

Dabei ist $\overrightarrow{x_0}$ die spezielle Lösung des inhomogenen Systems und die $\overrightarrow{x_1}, ..., \overrightarrow{x_{n-r}}$ bilden ein Fundamentalsystem des zugehörigen homogenen Systems $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$. D. h. es gibt unendlich viele Lösungen und $(n-r)$ Unbekannte sind frei wählbare Parameter.

■

Für ein quadratisches inhomogenens lieneares (n, n)-Gleichungssystem (Sonderfall $m = n$) gilt folgender Satz:

Satz 5.8: Sei $A\vec{x} = \vec{b}$ ein inhomogenes lineares *quadratisches* Gleichungssystem (mit $A = A_{(n,n)}$, d. h. n Gleichungen mit n Unbekannten). Dann gilt:

(i) Ist A *regulär* (d. h. $\det A \neq 0$), so besitzt das Gleichungssystem genau *eine* Lösung. Sie kann mit Hilfe der Cramerschen Regel angegeben werden (siehe nächster Satz).

(ii) Ist A *singulär* (d. h. $\det A = 0$), so besitzt das Gleichungssystem

für $\mathit{Rang} A \neq \mathit{Rang}\left(A, \vec{b}\right)$ keine Lösung,

für $\mathit{Rang} A = \mathit{Rang}\left(A, \vec{b}\right) = r < n$ unendlich viele Lösungen mit $n - r$ Parametern.

■

Satz 5.9 (Cramersche Regel): Ein inhomogenes lineares *quadratisches* Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ mit regulärer Matrix A besitzt die eindeutig bestimmte Lösung

$$x_i = \frac{D_i}{D} \qquad (i = 1, ..., n)$$

Dabei ist $D = \det A$ und D_i ist die Hilfsdeterminante, die aus D hervorgeht, indem die i-te Spalte durch $\vec{b}$ ersetzt wird.

■

Beispiel 5.10

Bemerkung 5.11: Die Anwendung der Cramerschen Regel erfordert für $n > 3$ einen großen Rechenaufwand. Für $n > 3$ wird man eher den *Gaußschen Algorithmus* verwenden. Die Cramersche Regel besitzt jedoch für theoretische Untersuchungen einen gewissen Wert.

Satz 5.12 (Gaußscher Algorithmus): Ein inhomogenes lineares Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ kann in folgenden Schritten gelöst werden:

1. Die erweiterte Matrix $\left(A, \vec{b}\right)$ wird durch die folgenden elementaren Zeilenumformungen in die Normalform $\left(A, \vec{b}\right)^*$ gebracht:

   (i) Vertauschen zweier Zeilen

   (ii) Multiplikation einer Zeile mit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

   (iii) Addition einer mit $\lambda \neq 0$ multiplizierten Zeile zu einer anderen Zeile

2. Das lineare (homogene oder inhomogene) Gleichungssystem liegt dann in einer gestaffelten Form vor und lässt sich von unten nach oben sukzessiv lösen.

■

Bemerkung 5.13: Die elementaren Zeilenumformungen entsprechen den ranginvarianten Operationen im Kapitel 2.5. Sie beziehen sich jedoch hier nur auf Zeilen. Jedoch ist eine Vertauschung der Indizes möglich (was einer Spaltenvertauschung in der Matrix A entspricht).

Beispiel 5.14

6 Komplexe Zahlen

6.1 Definition

Definition 6.1 (Darstellung 1): Eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ wird wie folgt dargestellt:

$$z = x + jy \qquad \text{mit } x, y \in \mathbb{R}$$

Dabei heißt x Realteil von z ($x =: \mathrm{Re}(z)$) und y Imaginärteil von z ($y =: \mathrm{Im}(z)$). Diese Darstellung heißt auch Normalform, algebraische Form oder kartesische Form.

■

Bemerkung 6.2:

1. Es handelt sich hier um eine *formale* Summe.
2. Die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ kann wie folgt definiert werden:

$$\mathbb{C} = \{z | z = x + jy, \quad x, y \in \mathbb{R}\}$$

3. Für die *reellen* Zahlen ist der Imaginärteil gleich null und es gilt

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Für die *imaginären* Zahlen ist der Realteil gleich null.

Skizze 6.3

Beispiel 6.4

6.2 Gleichheit, Betrag, Konjugierung

Definition 6.5: Zwei komplexe Zahlen $z_1 = x_1 + jy_1$ und $z_2 = x_2 + jy_2$ sind *gleich*, wenn sie in ihren jeweiligen Real- und Imaginärteilen übereinstimmen, d. h.

$$z_1 = z_2 \Longleftrightarrow x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$$

■

Definition 6.6: Unter dem Betrag einer komplexen Zahl $z = x + jy$ versteht man den folgenden nichtnegativen Ausdruck

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{[\mathrm{Re}\,(z)]^2 + [\mathrm{Im}\,(z)]^2}$$

■

Skizze 6.7

Es gilt:

(i) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

(ii) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

(iii) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ für $z_2 \neq 0$

Beispiele 6.8

Definition 6.9: Zwei komplexe Zahlen, die sich nur im Vorzeichen ihres Imaginärteils unterscheiden heißen *konjugiert komplexe Zahlen.*

$$\begin{aligned} z &= x + jy \\ \overline{z} &= x - jy \end{aligned}$$

z und $\overline{z}$ sind konjugiert komplex zueinander.

■

Skizze 6.10

Beispiel 6.11

6.3 Weitere Darstellungsformen komplexer Zahlen

Definition 6.12 (Darstellung 2): Die folgende Darstellung einer komplexen Zahl z heißt *trigonometrische Form* (Polarform):

$$z = r\,(\cos\varphi + j\sin\varphi) \qquad \text{mit} \quad \begin{array}{ll} r = |z| & \text{Betrag von } z \\ \varphi = \arg z & \text{Argument (Winkel) von } z \end{array}$$

Dabei gilt $r = |z| \geq 0$ und $0 \leq \varphi < 2\pi$ (Hauptwerte).

■

Skizze 6.13

Beispiele 6.14

Definition 6.15 (Darstellung 3): Die folgende Darstellung einer komplexen Zahl z heißt *Exponentialform*:

$$z = re^{j\varphi} \qquad \text{mit} \quad \begin{array}{ll} r = |z| & \text{Betrag von } z \\ \varphi = \arg z & \text{Argument (Winkel) von } z \end{array}$$

Dabei gilt $r = |z| \geq 0$ und $0 \leq \varphi < 2\pi$ (Hauptwerte).

■

Weitere Schreibweise für $e^{j\varphi}$:

$$\angle\varphi := e^{j\varphi}, \angle-\varphi := e^{-j\varphi} \qquad \text{Versor } \varphi$$

Für die konjugiert komplexe Zahl $\overline{z}$ gilt dann:

$$\overline{z} = re^{-j\varphi}$$

Aus der trigonometrischen Form erhält man die Exponentialform sofort mit Hilfe der *Formel von Euler*:

$$e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi$$

Bemerkung 6.16:

1. Aus der Formel von Euler folgt, dass die komplexe Exponentialfunktion (im Gegensatz zur reellen) periodisch mit der Periode $j2\pi$ ist:

$$e^{j\varphi} = e^{j(\varphi+k2\pi)} \qquad k \in \mathbb{Z}, r > 0, 0 \leq \varphi < 2\pi$$

2. Die trigonometrische Form (Darstellung 2) und die Exponentialform (Darstellung 3) basieren auf *Polarkoordinaten.* Deshalb werden die beiden Formen auch *Polarformen* genannt.

Mit Hilfe der folgenden Transformationsgleichungen läßt sich eine komplexe Zahl z von einer Darstellung in eine andere Darstellung überführen.

(i) Normalform $\longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{trigonometrische Form} \\ \text{Exponentialform} \end{array} \right\}$

Aus $z = x + jy$ wird mit Hilfe der Transformation

$$\boxed{\begin{array}{l} r = |z| = \sqrt{x^2+y^2} \\ \tan\varphi = \dfrac{y}{x} \qquad \text{bzw. } \varphi = \arctan\dfrac{y}{x} \end{array}}$$

dann $z = r(\cos\varphi + j\sin\varphi)$ bzw. $z = re^{j\varphi}$.

(ii) $\left\{ \begin{array}{l} \text{trigonometrische Form} \\ \text{Exponentialform} \end{array} \right\} \longrightarrow$ Normalform

Aus $z = r(\cos\varphi + j\sin\varphi)$ bzw. $z = re^{j\varphi}$ wird mit Hilfe der Transformation

$$\boxed{\begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{array}}$$

dann $z = x + jy$.

Bemerkung 6.17

Beispiele 6.18

6.4 Rechenoperationen

Für die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ lassen sich wie bei den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ die folgenden 4 Grundrechenarten definieren.

6.4.1 Addition und Subtraktion

Definition 6.19: Zwei komplexe Zahlen $z_1 = x_1 + jy_1$ und $z_2 = x_2 + jy_2$ werden addiert bzw. subtrahiert, indem die Real- und die Imaginärteile jeweils für sich addiert bzw. subtrahiert werden.

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + x_2) + j\,(y_1 + y_2) \qquad (z_1 + z_2) \in \mathbb{C} \\ z_1 - z_2 &= (x_1 - x_2) + j\,(y_1 - y_2) \qquad (z_1 - z_2) \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

■

Bemerkung 6.20:

1. Komplexe Zahlen lassen sich nur in der *Normalform* addieren bzw. subtrahieren. Gegebenenfalls müssen sie vorher umgewandelt werden.
2. Die Summe bzw. Differenz zweier komplexer Zahlen ist wieder eine komplexe Zahl.

Es gelten für $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ die folgenden Gesetze:

(i) Kommutativgesetz:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

(ii) Assoziativgesetz:

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$$

Beispiele 6.21

6.4.2 Multiplikation

Definition 6.22:

(i) Seien $z_1 = x_1 + jy_1$ und $z_2 = x_2 + jy_2$ zwei komplexe Zahlen in Normalform. Dann gilt für das *Produkt* $z_1 \cdot z_2$:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + j\,(x_1y_2 + x_2y_1)$$

(ii) Seien $z_1 = r_1 e^{j\varphi_1} = r_1 (\cos\varphi_1 + j \sin\varphi_1)$ und $z_2 = r_2 e^{j\varphi_2} = r_2 (\cos\varphi_2 + j \sin\varphi_2)$ zwei komplexe Zahlen in Exponentialform bzw. trigonometrische Form. Dann erhält man das Produkt $z_1 \cdot z_2$, indem man die *Beträge multipliziert* und die *Argumente (Winkel) addiert*:

$$z_1 \cdot z_2 = (r_1 \cdot r_2)\, e^{j(\varphi_1+\varphi_2)} = (r_1 \cdot r_2)\left[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + j\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right] \qquad z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{C}$$

■

Bemerkung 6.23

Es gelten für $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ die folgenden Gesetze:

(i) Kommutativgesetz:

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$$

(ii) Assoziativgesetz:

$$z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$$

(iii) Distributivgesetz:

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$$

Beispiele 6.24

6.4.3 Division

Definition 6.25:

(i) Seien $z_1 = x_1 + jy_1$ und $z_2 = x_2 + jy_2$ zwei komplexe Zahlen in Normalform und $z_2 \neq 0$. Dann gilt für den *Quotienten* $\frac{z_1}{z_2}$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + j\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

(ii) Seien $z_1 = r_1 e^{j\varphi_1} = r_1 (\cos\varphi_1 + j \sin\varphi_1)$ und $z_2 = r_2 e^{j\varphi_2} = r_2 (\cos\varphi_2 + j \sin\varphi_2)$ zwei komplexe Zahlen in Exponentialform bzw. trigonometrische Form. Dann erhält man den *Quotienten* $\frac{z_1}{z_2}$, indem man die *Beträge dividiert* und die *Argumente (Winkel) subtrahiert*:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\varphi_1-\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + j\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right] \qquad \frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{C}$$

■

Bemerkung 6.26:

1. (i) erhält man durch eine Erweiterung des Quotienten $\frac{z_1}{z_2}$ mit dem konjugiert komplexen Nenner $\overline{z_2}$: **Rechnung 6.27**

2. Für die Division ist wiederum die Exponentialform bzw. trigonometrische Form vorteilhaft.

3. Die geometrische Deutung läßt sich auf die Multiplikation zurückführen. Die Drehstreckung erhält man dann wie folgt:

   (a) Streckung von r_1 um das $\frac{1}{r_2}$-fache

   (b) Drehung um den Winkel φ_2

      i. im negativen Drehsinn (im Uhrzeigersinn) für $\varphi_2 > 0$

      ii. im positiven Drehsinn (gegen den Uhrzeigersinn) für $\varphi_2 < 0$.

Beispiele 6.28

6.4.4 Potenzen und Wurzeln

Definition 6.29: Sei $z \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl und $n \in \mathbb{Z}$ eine beliebige ganze Zahl. Dann ist die *Potenz* $z^n \in \mathbb{C}$ wie folgt definiert:

$$z^n = \left\{ \begin{array}{lll} z \cdot z \cdot \ldots \cdot z & (n\text{-mal}) & \text{für } n > 0 \\ 1 & & \text{für } n = 0 \\ \frac{1}{z^{-n}} & & \text{für } n < 0 \text{ und } z \neq 0 \end{array} \right\}$$

■

Für die praktische Berechnung ist der *Satz von Moivre* hilfreich:

Satz 6.30 (Satz von Moivre):

$$(\cos\varphi + j\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + j\sin n\varphi \qquad \text{mit } n \in \mathbb{Q}$$

■

Dieser Satz läßt sich leicht aus der Eulerschen Formel herleiten: **Rechnung 6.31**

Für die *praktische Berechnung* geht man vorteilhaft in den folgenden 3 Schritten vor:

1. Herstellung der trigonometrischen Form

$$z = r\,(\cos\varphi + j\sin\varphi)$$

2. Potenzieren mit dem Satz von Moivre

$$z^n = r^n\,(\cos\varphi + j\sin\varphi)^n = r^n\,(\cos n\varphi + j\sin n\varphi)$$

3. Reduzieren des Winkels $n\varphi$ auf den Hauptwertebereich $0 \leq n\varphi < 2\pi$ durch geeignetes Addieren von $k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ und gegebenenfalls Wiederherstellung der Normalform.

Bemerkung 6.32: Aus dem Satz von Moivre läßt sich folgende Regel ableiten: Eine komplexe Zahl $z = re^{j\varphi} = r(\cos\varphi + \sin\varphi)$ wird in die n-te Potenz erhoben, indem der Betrag r mit n potenziert und das Argument (Winkel) φ mit n multipliziert wird.
Es gilt also auch:

$$z^n = r^n e^{jn\varphi}$$

Beispiel 6.33

Definition 6.34: Sei $z \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl und $n \in \mathbb{N}$. Dann versteht man unter der *n-ten Wurzel* $\sqrt[n]{z}$ *jede* komplexe Zahl, deren n-te Potenz gleich z ist.
■

Für die praktische Berechnung wird wiederum der *Satz von Moivre* benutzt, allerdings wird jetzt die Periodizität von sin und cos ausgenutzt. Es gilt:

Satz 6.35: Für die n-te Wurzel aus einer komplexen Zahl $z = r(\cos\varphi + j\sin\varphi)$ ergeben sich mit

$$\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right) + j\sin\left(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)\right) \qquad (k = 0, 1, ..., n-1)$$

genau n verschiedene komplexe Werte.

Für $k = 0$ erhält man den *Hauptwert* von $\sqrt[n]{z}$:

$$\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n}\right) + j\sin\left(\frac{\varphi}{n}\right)\right)$$

Dabei soll stets $\sqrt[n]{r} \geq 0$ gelten.
■

Beispiel 6.36

6.4.5 Natürlicher Logarithmus

Definition 6.37: Sei $z = re^{j(\varphi+k2\pi)} = r(\cos(\varphi + k2\pi) + \sin(\varphi + k2\pi))$ eine komplexe Zahl ungleich null mit $k \in \mathbb{Z}$. Dann wird der *natürliche Logarithmus* wie folgt ermittelt:

$$\ln z = \ln r + j(\varphi + k2\pi) \qquad z \neq 0$$

Für $k = 0$ erhält man den *Hauptwert:*

$$Lnz = \ln r + j\varphi \qquad (0 \leq \varphi < 2\pi) \qquad z \neq 0$$

Für $k = \pm 1, \pm 2, ...$ erhält man die sogenannten Nebenwerte.
■

Bemerkung 6.38:

1. Eine komplexe Zahl muss vor dem Logarithmieren in die Exponentialform gebracht werden.
2. Es gelten die gleichen Rechengesetze wie für die Logarithmen reeller Zahlen.

Beispiel 6.39 .