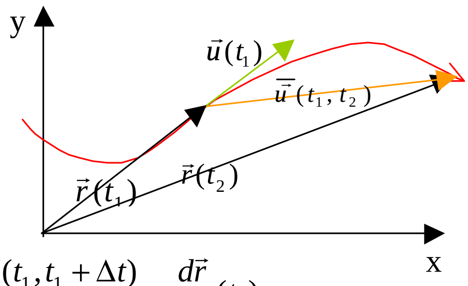
A Mechanik

I Mechanik der Massenpunkte

1 Kinematik der Massenpunkte

<u>Kinematik</u>: Beschreibung der Bewegung, durch

$$\left.\begin{array}{l}\text{Ortsänderung}\\ \text{Geschwindigkeit}\\ \text{Beschleunigung}\end{array}\right\}\ \text{Vektoren}\ \left\{\begin{array}{l}\Delta\vec{r},\ \vec{r} = \text{Ortsvektor in einem von uns gewählten KO - System}\\ \vec{u},\ \text{Änderung des Ortes mit der Zeit}\\ \vec{a},\ \text{Änderung der Geschwindigkeit mit der Zeit}\end{array}\right.$$



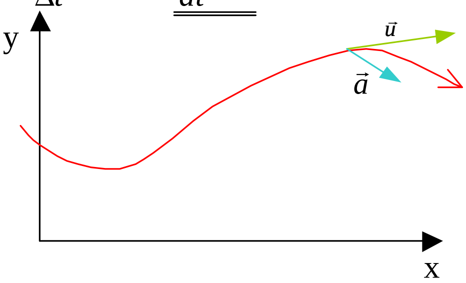
<u>Geschwindigkeit:</u>

<u>Durchschnittsgeschwindigkeit</u> im Zeitraum von t_1 bis t_2:

$$\bar{\vec{u}}(t_1,t_2) = \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{r}(t_1,t_2)}{\Delta t}$$ [1]

<u>Momentangeschwindigkeit</u> zum Zeitpunkt t_1:

$$\underline{\underline{\vec{u}(t_1)}} = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t_1 + \Delta t) - \vec{r}(t_1)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}(t_1, t_1 + \Delta t)}{\Delta t} = \underline{\underline{\frac{d\vec{r}}{dt}(t_1)}}$$



<u>Beschleunigung:</u>

<u>Durchschnittsbeschleunigung:</u>

$$\bar{\vec{a}}(t_1,t_2) = \frac{\vec{u}(t_2) - \vec{u}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{u}(t_1,t_2)}{\Delta t}$$ [2]

<u>Momentanbeschleunigung</u> zur Zeit t_1:

$$\underline{\underline{\vec{a}(t_1)}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{u}(t_1 + \Delta t) - \vec{u}(t_1)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{u}(t_1, t_1 + \Delta t)}{\Delta t} = \underline{\underline{\frac{d\vec{u}}{dt}(t_1)}}$$

<u>Bewegung in der Ebene:</u>

Wollen wir die Bewegung eines Teilchens in der $x - y -$ Ebene (in kartesischen Koordinaten) beschreiben, so gilt:

$$\vec{u}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} : \begin{pmatrix} u_x(t) \\ u_y(t) \end{pmatrix} = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dx(t)/dt \\ dy(t)/dt \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{u}(t)}{dt} : \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \end{pmatrix} = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u_x(t) \\ u_y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} du_x(t)/dt \\ du_y(t)/dt \end{pmatrix}$$

<u>1. Spezialfall:</u>

Bei <u>konstanter Beschleunigung</u> ($\vec{a}$ = konst) ergibt die Integration obiger Gleichungen:

---

[1] Skalarprodukt: Richtung von $\Delta\vec{r}$, Betrag $|\Delta\vec{r}| \cdot \frac{1}{\Delta t}$, Einheit: Länge/Zeit = m/s

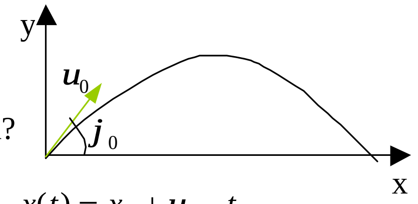
[2] Skalarprodukt: Richtung: $\Delta\vec{u}$, Betrag $\frac{\Delta u}{\Delta t}$, Einheit: Geschwindigkeit/Zeit = m/s²

$\vec{\upsilon}(t) = \vec{\upsilon}_0 + \vec{a} \cdot t \quad (\vec{\upsilon}_0 = \vec{\upsilon}(t=0))$

$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{\upsilon}_0 t + \tfrac{1}{2}\vec{a}t^2$

Bsp.: Ein Fußballspieler schießt den Ball unter einem Winkel von 37^0 zur Horizontalen mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 20 m/s.

a) Nach welcher Zeit erreicht der Ball seinen höchsten Punkt?
b) Wie hoch ist er dann?
c) Wie lange ist er in der Luft?
d) Wie weit fliegt der Ball?
e) Mit welcher Geschwindigkeit landet er auf dem Boden?



In $x-$Richtung gilt: $a_x = 0,\ \upsilon_x = \upsilon_{x0} = \upsilon_0 \cdot \cos\varphi,\ x_0 = 0,\ x(t) = x_0 + \upsilon_{x0} \cdot t$

In $y-$Richtung gilt: $\begin{cases} a_y = -g = -9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2},\ \upsilon_y = \upsilon_{y0} + at = \upsilon_0 \sin\varphi_0 - gt, \\ y_0 = 0,\ y(t) = y_0 + \upsilon_0 \sin\varphi_0 \cdot t - \tfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$

a) Im höchsten Punkt gilt: $\upsilon_y = 0$:

$$0 = \upsilon_0 \sin\varphi_0 - gt_{hoch} \Rightarrow \underline{\underline{t_{hoch}}} = \frac{\upsilon_0 \sin\varphi_0}{g} \underline{\underline{= 1.23\ \mathrm{s}}}.$$

b) $\underline{\underline{y_{\max}}} = \underbrace{y_0}_{=0} + \upsilon_0 \sin\varphi_0 \cdot t_{hoch} - \tfrac{1}{2} g t_{hoch}^2 \underline{\underline{= 7.38\ \mathrm{m}}}.$

c) $y(t_{Flug}) = 0 = \upsilon_0 \sin\varphi_0 \cdot t_{Flug} - \tfrac{1}{2} g t_{Flug}^2 \Rightarrow \underline{\underline{t_{Flug}}} = \dfrac{2}{g} \cdot \upsilon_0 \sin\varphi_0 = 2 \cdot t_{hoch} \underline{\underline{= 2.45\ \mathrm{s}}}.$

d) $\underline{\underline{R}} = x(t_{Flug}) = \underbrace{x_0}_{=0} + \upsilon_{x0} \cdot t_{Flug} = \dfrac{2}{g} \cdot \upsilon_0^2 \sin\varphi_0 \cos\varphi_0 = \underline{\underline{39.20\ \mathrm{m}}}.$

e) $\upsilon_x(t_{Flug}) = \upsilon_{x0} = \upsilon_0 \cdot \cos\varphi_0$

$\upsilon_y(t_{Flug}) = \upsilon_{y0} - g \cdot t_{Flug} = \upsilon_0 \sin\varphi_0 - 2\upsilon_0 \sin\varphi_0 = -\upsilon_0 \sin\varphi_0 = -\upsilon_{y0}$

$\underline{\underline{\upsilon_{Ende}}} = \sqrt{\upsilon_x^2(t_{Flug}) + \upsilon_y^2(t_{Flug})} = \upsilon_0 \sqrt{\cos^2\varphi_0 + \sin^2\varphi_0} = \upsilon_0 = \underline{\underline{20\ {}^{\mathrm{m}}\!/\!{}_{\mathrm{s}}}}.$

$\tan\varphi_{Ende} = \dfrac{\upsilon_y(t_{Flug})}{\upsilon_x(t_{Flug})} = -\dfrac{\sin\varphi_0}{\cos\varphi_0} = -\tan\varphi_0 \Rightarrow \underline{\underline{\varphi_{Ende}}} = -\varphi_0 = \underline{\underline{-37^0}}.$

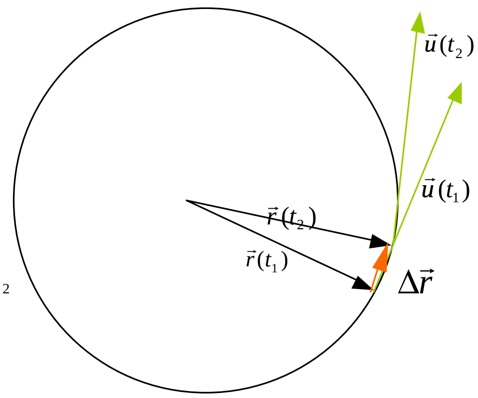
Hinweis: Wenn Sie $x(t)$ nach t auflösen und dies in $y(t)$ einsetzen, eliminieren Sie den Parameter t und erhalten die Flugkurve $y(x)$.[3]

2. Spezialfall:
Gleichförmige Kreisbewegung:

Frage: Welche Beschleunigung erfährt ein Körper, der mit konstanter Bahngeschwindigkeit υ auf einem Kreis mit Radius r umläuft?

Antw.: $\vec{a} \neq 0$, da $\vec{\upsilon}$ nicht konstant! $\vec{a} = \dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt}$.

Die beiden Dreiecke $\vec{\upsilon}_1\vec{\upsilon}_2\Delta\vec{\upsilon}$ und $\vec{r}_1\vec{r}_2\Delta r$ sind ähnlich, denn:



[3] $x(t)$: $t = \dfrac{x - x_0}{\upsilon_{x0}} = \dfrac{x}{\upsilon_{x0}} \Rightarrow$ in $y(t)$: $y(x) = \dfrac{\upsilon_0 \sin\varphi_0 \cdot x}{\upsilon_0 \cos\varphi_0} - \dfrac{1}{2} g \dfrac{x^2}{\upsilon_{x0}^2} = \tan\varphi_0 \cdot x - \dfrac{g}{2\upsilon_{x0}^2} \cdot x^2$

$\Rightarrow y(x) = Ax^2 + Bx$: Parabel

$$\left|\vec{u}_1\right| = \left|\vec{u}_2\right| \leftrightarrow \left|\vec{r}_1\right| = \left|\vec{r}_2\right| \quad \text{und}$$

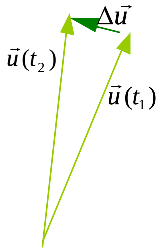
$$\prec\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2\right) = \prec\left(\vec{r}_1, \vec{r}_2\right).^{4}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta u}{u} = \frac{\Delta r}{r} \quad \Big| \cdot \frac{1}{\Delta t}$$

$$\frac{1}{u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\Delta r}{\Delta t} \quad \Big| \lim_{\Delta t \to 0}$$

$$\frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dt} = \frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{dt} = \frac{1}{r} \cdot u.^{5}$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dt} = \underline{\underline{a = \left|\vec{a}\right| = \frac{u^2}{r}}} \qquad (\left|\vec{a}\right| \text{ ist konstant }).$$



$\vec{a}$ ist immer zum Zentrum der Kreisbahn hin gerichtet ($\vec{a} \perp \vec{u}$) - *Zentripetalbeschleunigung*.[6]

Bsp.: Der Mond braucht für eine Erd-Umrundung 27.3 Tage. Nehmen Sie eine kreisförmige Bahn mit Radius $3.84 \cdot 10^8\,\mathrm{m}$ an. Wie groß ist die Beschleunigung des Mondes in Richtung Erde?

$$a = \frac{u^2}{r}, \quad u = \frac{\text{Bahnumfang}}{\text{Umlaufzeit}} = \frac{2pr}{T}$$

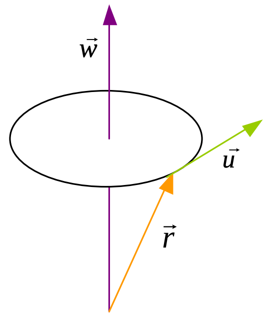
$$\Rightarrow \underline{\underline{a}} = \frac{4p^2 r}{T^2} = 4p^2 \cdot \frac{3.84 \cdot 10^8\,\mathrm{m}}{\left(27.3\mathrm{d} \cdot \frac{24\mathrm{h}}{\mathrm{d}} \cdot \frac{60\mathrm{min}}{\mathrm{h}} \cdot \frac{60\mathrm{s}}{\mathrm{min}}\right)^2} = \underline{\underline{2.72 \cdot 10^{-3}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} \left(= 2.78 \cdot 10^{-4} \cdot \underbrace{g}_{9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} \right)$$

Weitere Zusammenhänge der periodischen Kreisbewegung:

Frequenz: $\quad n = \frac{1}{T}, \quad T = \text{Periode, Umlaufzeit}$

Kreisfrequenz: $\quad w = 2pn = \frac{2p}{T} \cdot \frac{r}{r} = \frac{u}{r} = \text{Winkelgeschwindigkeit}: \frac{u}{r} = \lim_{\Delta t \to 0} \underbrace{\frac{\Delta s}{r}}_{\substack{\text{Winkel in rad} \\ = \Delta j}} \cdot \frac{1}{\Delta t} = \frac{dj}{dt}$ [7]

$$\vec{u} = \vec{w} \times \vec{r}$$



2 Dynamik der Massenpunkte

Dynamik: Zusammenhang Kräfte - Körper - Bewegung

Newtonsche Gesetze

1. Newtonsches Gesetz: Ein Körper erfährt nur dann eine Beschleunigung, wenn eine Nettokraft auf ihn wirkt. (*Trägheitsprinzip*)

2. Newtonsches Gesetz: *Kraft* = *Masse* · *Beschleunigung*

---

4 $\vec{u}$ liegt immer tangential zur Bahn: $\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt}$.

5 Genau genommen ist $u = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, s = Kreisbogen. $\Delta s \to \Delta r$ für $\Delta r \to 0$.

6 Hat $\vec{a}$ eine Komponente in Richtung von $\vec{u}$, dann ist $\left|\vec{u}\right|$ nicht konstant.

7 Frequenz in Umdrehungen/Sekunde; Kreisfrequenz in rad/s.

$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ (*Aktionsprinzip*), $\vec{F} =$ resultierende, an m angreifende äußere Kraft.

Ein Körper der Masse 1 kg, der mit 1 $^{m}\!/\!_{s^2}$ beschleunigt wird, erfährt die Kraft 1 N („ein Newton"). Kräfte gehorchen den Gesetzen der Vektoraddition.[8]

Die doppelte Masse erfährt bei gleicher Kraft die halbe Beschleunigung $\Rightarrow$ *„Träge Masse"*.

Das 2-te Newtonsche Gesetz impliziert das erste:

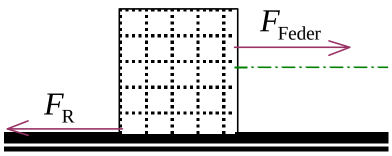
Für $\vec{F} = \vec{0}$ ist $\vec{a} = \vec{0}$. ➩ Statik

<u>3. Newtonsches Gesetz:</u> *Reaktionsprinzip:*

Wenn ein Körper A eine Kraft $\vec{F}$ auf einen Körper B ausübt, dann übt Körper B die Kraft $-\vec{F}$ auf Körper A aus.[9]

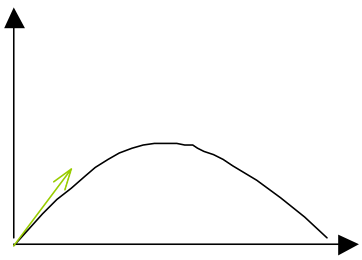
<u>Masse und Gewicht:</u> Das Gewicht eines Körpers ist die Gravitationskraft, die die Erde auf ihn ausübt: $F_G = m \cdot g$.[10]

<u>Kraftgesetze:</u>

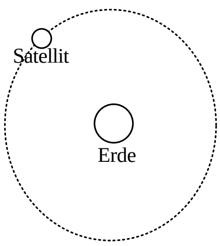


Feder: $F_{Feder} = -kx$,
$x =$ Auslenkung der Feder aus der Gleichgewichtslage,
$k =$ Federkonstante

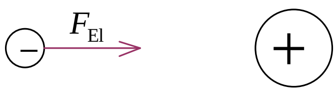
Reibung: $F_R = m \cdot F_{\text{N}}$,
$F_{\text{N}} =$ Normalkraft zwischen Körper und Unterlage,
$m =$ Reibungkoeffizient



Erde: $F = mg$,
$\vec{F}$ ist „nach unten" gerichtet



Erde: $F = G \cdot \dfrac{m \cdot M}{r^2}$,
$G =$ Gravitationskonstante,
$m =$ Masse des Satelliten,
$M =$ Masse der Erde,
$r =$ gegenseitiger Abstand

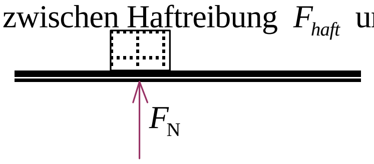


Elektrostatik: $F_{El} = \dfrac{1}{4pe_0} \cdot \dfrac{e \cdot Q}{r^2}$,
$e_0 =$ el. Feldkonstante,
$e =$ Ladung des Elektrons,
$Q =$ Ladung der positiven Kugel,
$r =$ gegenseitiger Abstand.

Bei den Reibungskräften unterscheiden wir zwischen Haftreibung F_{haft} und Gleitreibung F_{gleit}:

$F_{haft} \le m_{haft} \cdot F_{\text{N}}$, $F_{haft,\max} = m_{haft} \cdot F_{\text{N}}$

$F_{gleit} = m_{gleit} \cdot F_{\text{N}}$



---

[8] Experimentell verifizieren!

[9] Es gibt keine einzelne isolierte Kraft, sonder die „Aktion" und die „Reaktion" tritt immer als Paar auf, wirkt aber auf verschiedene Körper!

[10] g ist keine Konstante!

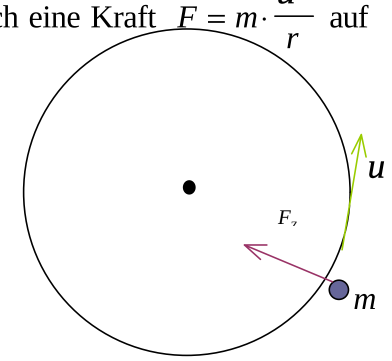
$m_{haft} > m_{gleit}$ [11].

F_N ist die Normalkraft, die zwischen Körper und Auflagefläche wirkt; F_N steht $\perp$ auf dieser Kontaktfläche. Die Reibungkraft F_R steht immer $\perp$ auf F_N und ist der Bewegung entgegengerichtet.

Bei der gleichförmigen Kreisbewegung erfährt die Masse m eine Beschleunigung $a = \frac{u^2}{r}$, die zum Kreismittelpunkt gerichtet ist. Wegen $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ muß also auch eine Kraft $F = m \cdot \frac{u^2}{r}$ auf die Masse wirken, die zum Kreiszentrum gerichtet ist

➪ *Zentripetalkraft*

$$F_Z = m \cdot \frac{u^2}{r}$$ [12]



<u>Rezept zum Lösen von Problemen der Dynamik:</u>

1) Identifiziere den Körper, nach dessen Bewegung gefragt ist.
2) Betrachte die Umgebung, die Kräfte auf den Körper ausübt.
3) Wähle ein Koordinatensystem, mit Ursprung und Achsen in geeigneter Weise.
4) „Freischneiden" des Körpers: Zeichne nur das Koordinatensystem, den Körper und alle auf ihn wirkenden äußeren Kräfte.
5) Benutze das 2. Newtonsche Gesetz für jede der Vektorkomponenten von $\vec{F}$ und $\vec{a}$.

<u>Bsp.:</u> Zwei unterschiedliche Massen sind über ein masseloses Seil und über eine masselose reibungsfreie Rolle miteinander verbunden. Wie groß ist die Seilkraft und die Beschleunigung der Massen?

Teil 2

1) Körper: m_1
2) Umgebung: Erdanziehung $m_1 \cdot g$, Seilkraft S
3), 4)
5) $a_{1y} = \frac{S - m_1 g}{m_1}$ **(1)**

Für m_2 gilt entsprechend:

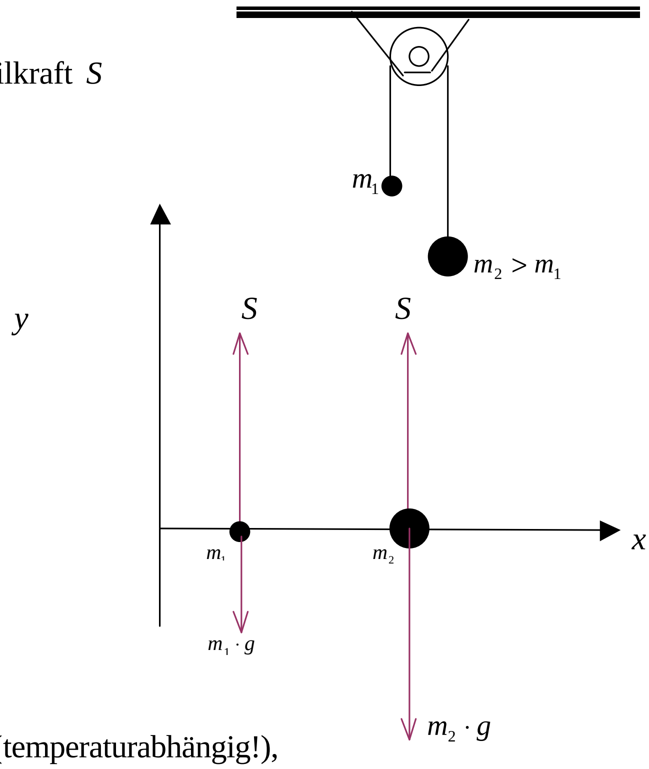
$$a_{2y} = -a_{1y} = \frac{S - m_2 g}{m_2} \quad \textbf{(2)}$$

(2) in **(1)** einsetzen:

$$g - \frac{S}{m_2} = \frac{S}{m_1} - g$$

$$\Rightarrow \frac{S}{m_1} + \frac{S}{m_2} = 2g$$

$$\underline{\underline{S = 2g \cdot \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}}},$$ [13]



[11] Eis auf Eis: $0{,}05 \le m_{haft} \le 0{,}15$, $m_{gleit} = 0{,}02$ (temperaturabhängig!),
Gummi auf Festkörper: $1 \le m_{haft} \le 4$, $m_{gleit} \approx 1$

[12] Durch Seil, Feder, Gravitation, el. Ladung...

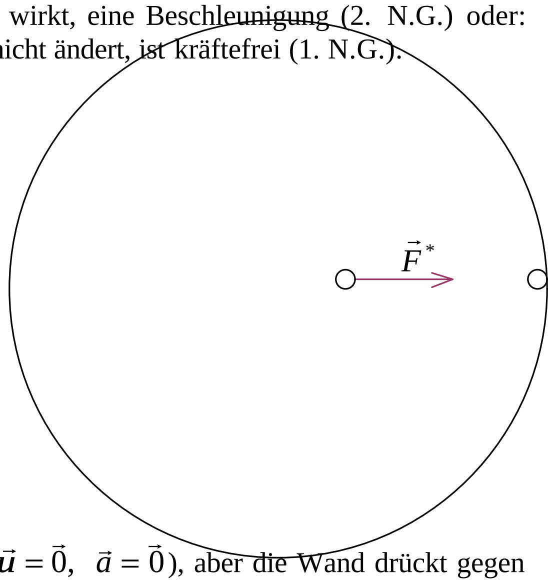
[13] = harmonisches Mittel von m_1g und m_2g.

Teil 1 $\left\{ \quad \underline{\underline{a_{1y}}} = \left(\frac{2m_2}{m_1+m_2} - 1 \right) \cdot g = \underline{\underline{\frac{m_2 - m_1}{m_1+m_2} \cdot g}} \right.$

<u>Trägheitskräfte</u>

Wegen $\vec{F} = m\vec{a}$ erfährt jeder Körper, auf den eine Kraft wirkt, eine Beschleunigung (2. N.G.) oder: Jeder Körper, dessen Geschwindigkeitsvektor sich zeitlich nicht ändert, ist kräftefrei (1. N.G.).

<u>Gedankenexperiment:</u>



Sie befinden sich in einem geschlossenen Raum mit kreisförmigem Querschnitt. Der Raum ist leer; es sind nur Sie selbst und eine Murmel darin. Sie machen folgende Beobachtung: Die Murmel liegt in Ruhe auf dem Boden und berührt die Wand. Sie nehmen sie in die Hand und legen sie vorsichtig wieder auf den Boden, etwas von der Wand entfernt. Wie von Geisterhand gezogen setzt sich die Murmel in Bewegung und rollt, mit konstanter Beschleunigung $\vec{a}$ wieder bis zur Wand! Nun spüren auch Sie selbst, daß eine unbekannte Kraft an Ihnen zieht und Sie gegen die Wand drückt! Newtons Gesetze scheinen nicht mehr zu stimmen:

1) Sie selbst und die Murmel sind an der Wand in Ruhe ($\vec{u} = \vec{0}$, $\vec{a} = \vec{0}$), aber die Wand drückt gegen Sie ($\vec{F} \neq \vec{0}$)!
2) Rücken Sie die Murmel von der Wand ab, dann erfährt sie eine Beschleunigung, obwohl keine äußere Nettokraft auf sie wirkt: $\vec{F} = 0$, aber $\vec{a} \neq 0$!
3) Sie stellen also fest: Es wirkt eine geheimnisvolle Kraft $\vec{F}^*$ auf die Murmel, die „Aktion“; es gibt aber in der Umgebung nichts, wovon diese Kraft ausgeht; es gibt also auch keine Reaktion in der Umgebung!

<u>Lösung:</u>

Ihr Bezugssystem selbst erfährt die Beschleunigung $-\vec{a}$!

Resultat: In einem Bezugssystem, das mit $\vec{a}$ beschleunigt wird, gibt es eine „Trägheitskraft“ $\vec{F}^* = -m \cdot \vec{a}$, die ihren Ursprung <u>nicht</u> in der Umgebung des betrachteten Körpers hat! ⇨ Zu dieser Kraft $\vec{F}^*$ gibt es keine Gegenkraft!

1.+3. N.G.: An der Wand heben sich $\vec{F}^*$ (Kraft auf die Wand) und $\vec{F}_{Wand \to Murmel}$ gegenseitig auf $\Rightarrow \vec{a} = \vec{0}$.

2. N.G.: Auf dem Boden wirkt $\vec{F}^* = m \cdot \vec{a}$ auf die Murmel ⇨ Sie wird beschleunigt.

Beschleunigte Bezugssysteme sind z.B.:

- Fahrstuhl
- Karussell.

Beschleunigte Bezugssysteme heißen auch „Nicht-Inertialsysteme“ ⇨ Trägheitskräfte berücksichtigen.

Unbeschleunigte Bezugssysteme heißen „Inertialsysteme“. Sie haben - relativ zu den Fixsternen - konstante Geschwindigkeit $\vec{u}_{Bezug}$ = konst. Hier treten keine Trägheitskräfte auf.

3 Arbeit und Energie

Bislang betrachteten wir konstante Kräfte F, die auf eine Masse m wirken und zu einer konstanten Beschleunigung a führen. Die Geschwindigkeit $\boldsymbol{u}(t)$ des Teilchens zu jeder Zeit und seine Position waren dann einfach zu berechnen. Die Sache wird komplizierter, wenn F und damit auch a nicht mehr konstant, sondern eine Funktion des Ortes ist, wie z.B. bei der Gravitation oder der Feder.

Wenn die Aufgabe lautet, bei einer räumlich veränderlichen Kraft die Geschwindigkeit eines Massenpunktes an einem bestimmten Ort zu berechnen, bietet sich die Berechnung über die Energie des Teilchens an. Dazu benötigen wir zunächst die

Definition der Arbeit:

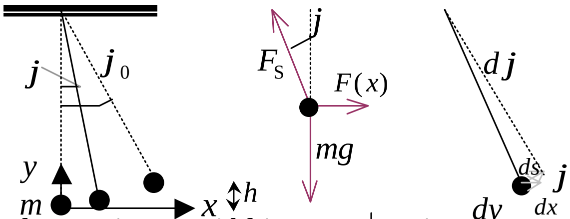
Wirkt eine konstante Kraft $\vec{F}$ auf ein Teilchen, das die Strecke $\vec{s}$ zurücklegt, so verrichtet die Kraft $\vec{F}$ an dem Teilchen die Arbeit $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$.[14]

Ist $\vec{F}$ eine Funktion des Ortes, so verrichtet $\vec{F}$ an dem Teilchen die Arbeit $W = \int_a^b \vec{F} d\vec{s}$.

Einheit: 1 Nm = 1 J

[15]

Bsp.: *Pendel:* Eine Masse m hängt an einem masselosen Seil der Länge l. Mit einer räumlich veränderlichen Kraft lenken wir die Masse entlang des Kreisbogens (Radius l) langsam mit konstanter Geschwindigkeit bis zum Winkel j_E aus. Welche Arbeit wird von der Kraft an der Masse verrichtet?



a) $\vec{F}$ ist immer horizontal gerichtet:

$$\left.\begin{aligned} F &= F_S \sin j \\ mg &= F_S \cos j \end{aligned}\right\} \tan j = \frac{F}{m \cdot g}$$

$$W = \int_{j=0}^{j_E} F dx = \int_{j=0}^{j_E} m \cdot g \tan j dx \quad \left| dx = ds \cdot \cos j = \cos j \, l dj \right. \qquad \left| \tan j = \frac{dy}{dx} \right.$$

$$\underline{\underline{W}} = mgl \int_{j=0}^{j_E} \sin j dj = mgl[-\cos j]_0^{j_E} = mgl(1 - \cos j_E) \underline{\underline{= mgh}} \qquad \left| \mathrm{W} = \mathrm{mg} \int_{\mathrm{y=0}}^{\mathrm{y=h}} \mathrm{dy} = mgh \right.$$

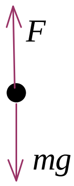
b) Welche Arbeit wird in a) von dem Seil an der Masse verrichtet?

$\underline{\underline{W_{Seil} = 0}}$, denn $\vec{F}_{Seil} \perp d\vec{s}$.

c) Welche Arbeit wird an einer Masse verrichtet, die von einer Kraft F um die Höhe h senkrecht nach oben gehoben wird?

$F = m \cdot g$

$\underline{\underline{W}} = F \cdot h = \underline{\underline{m \cdot g \cdot h}}$



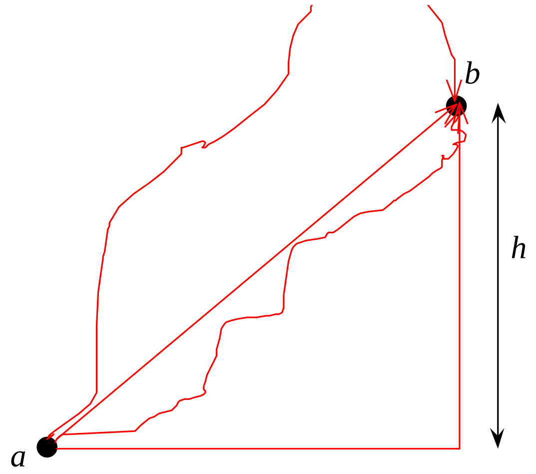
Potentielle Energie

Wir haben gesehen, daß wir gegen das Schwerefeld der Erde Arbeit verrichten müssen, um einen Körper der Masse m um die Höhe h anzuheben: $W = m \cdot g \cdot h$. Diese Arbeit ist

---

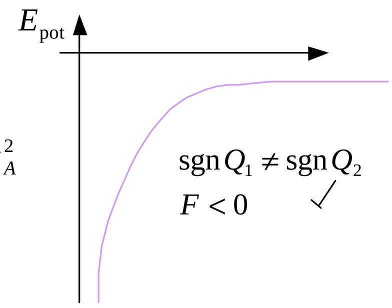
[14] $W = F \cdot s \cdot \cos j$; $F \cdot \cos j$ ist die Kraftkomponente von $\vec{F}$ in Richtung von $\vec{s}$.

[15] Muskeln. Myosinköpfchen greifen an Aktinfilamenten an und verkürzen die Fasern. Starres Halten: Filamente rudern auf der Stelle → Energieverbrauch! (Würden sie nur starr angeklinkt, würden Skelettmuskeln erstarren, Beweglichkeit ginge verloren. Sp.d.W. 2/2001, S. 38)



unabhängig vom Weg, den wir wählen ⇨ wir sagen, <u>das Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$ ist „konservativ“</u>[16]. Die Arbeit W steckt nun als *„potentielle Energie“* $\boxed{E_{pot} = m \cdot g \cdot h}$ „in dem Körper“[17], denn wenn wir die Arbeit verrichtende Kraft „abschalten“, fällt der Körper zurück und gewinnt Bewegungsenergie.

<u>Allgemein gilt:</u> Verrichten wir gegen ein <u>konservatives Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$</u> an einem Körper die Arbeit $W = -\int_a^b \vec{F}(\vec{r})d\vec{r}$, so ändert sich seine potentielle Energie um denselben Betrag: $\boxed{\Delta E_{pot} = -\int_a^b \vec{F}(\vec{r})d\vec{r}}$.



<u>Bsp.:</u> Gravitation: $E_{pot} = m \cdot g \cdot h$ { $F(y) = \text{konst}$ geht auch!}

Feder: $F_{Feder} = -k \cdot x,\ \Delta E_{pot} = -\int_{x_A}^{x_E} F(x)dx = \frac{1}{2}kx_E{}^2 - \frac{1}{2}kx_A^2$

Elektrostatik: Coulombkraft:

$$F_{Coul} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1 Q_2}{r^2},\quad E_{pot} = +\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{r}$$ [18]

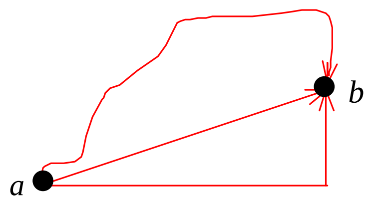
Umgekehrt gilt: Ist das Skalarfeld $E_{pot}(\vec{r})$ bekannt, so läßt sich das konservative Kraftfeld berechnen:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\text{grad}\, E_{pot}(\vec{r}) = -\begin{pmatrix} \partial E_{pot}/\partial x \\ \partial E_{pot}/\partial y \\ \partial E_{pot}/\partial z \end{pmatrix},$$ [19]

d.h. $\vec{F}$ zeigt in die Richtung, in der E_{pot} am schnellsten abnimmt.

<u>Bsp. für nicht - konservative Kraft:</u>

Reibung: Bei der Verschiebung eines Körpers von A nach B kommt es bei der Berechnung der verrichteten Arbeit sehr wohl auf den Weg an ⇨ Die Definition einer potentiellen Energie $E_{pot}(\vec{r})$ als Funktion des Ortes ist nicht sinnvoll. {⇨ Die mechanische Energieerhaltung gilt nicht.}



<u>Leistung</u>

[16] Geschlossener Weg: $\oint \vec{F}d\vec{s} = \Delta E_{\text{kin}} = 0$ für konservative Kräfte. Nicht-konservative Kräfte: $\oint \vec{F}d\vec{s} = \Delta E_{\text{kin}} \neq 0$; Reibung: $\Delta E_{\text{kin}} < 0$; Ringbeschleuniger: $\Delta E_{\text{kin}} > 0$.

[17] Für $g = \text{konst} \Rightarrow h\ \text{klein}$.

[18] Potential = Spannung $U = \frac{E_{pot}}{Q_{Probe}}$.

[19] Eindimensional: $F_x = -\frac{dE_{pot}}{dx}$.

Interessieren wir uns nicht nur für die Arbeit W, die eine Kraft an einem Körper verrichtet, sondern auch für die Zeit t, die dafür benötigt wird, so kommen wir zum Begriff der

Leistung P:

$P = \frac{dW}{dt}$, oder, wenn $P(t) = \text{konst}$: $W = P \cdot t$. Einheit: $[P] = \text{W}$

Kinetische Energie

Die Kräfte an unserem Körper seien nun nicht mehr ausbalanciert, sondern es wirke eine Nettokraft ⇨ Die Masse wird beschleunigt.

Annahme:

Die veränderliche Kraft $\vec{F}$ wirkt in x-Richtung: $F = F(x)$, die Bewegung des Körpers erfolge ebenfalls in x-Richtung:

$$W = \int_{x_A}^{x_E} F(x)dx = \int_{x_A}^{x_E} (m \cdot a)dx = m \cdot \int_{x_A}^{x_E} \frac{d\boldsymbol{u}}{dt} dx = m \cdot \int_{u_A}^{u_E} \boldsymbol{u} d\boldsymbol{u} = \frac{1}{2} m\boldsymbol{u}^2 \Big|_{u_A}^{u_E} = \frac{1}{2} m\left(\boldsymbol{u}_E{}^2 - \boldsymbol{u}_A^2\right)$$

$$= \frac{1}{2} m\boldsymbol{u}_E{}^2 - \frac{1}{2} m\boldsymbol{u}_A^2$$

Wir nennen $\underline{\underline{E_{kin} = \tfrac{1}{2} m\boldsymbol{u}^2}}$ die „kinetische Energie" des Körpers der Masse m und der Geschwindigkeit $\boldsymbol{u}$.

Wir stellen fest:

Die Arbeit, die von einer Nettokraft an einem Körper verrichtet wird, ist gleich der Änderung der kinetischen Energie des Körpers.

Dies gilt auch im allgemeinen Fall für beliebiges $\vec{F}(\vec{r})$ und jede beliebige Kurve der Bewegung.[20]

Umgekehrt gilt:

Nimmt die kinetische Energie eines Körpers ab ($\Delta E_{kin} < 0$), so ist die verrichtete Arbeit der angreifenden Kraft negativ: $\int \vec{F} d\vec{s} < 0$. (verrichtet er Arbeit an der Umgebung.)

Energieerhaltung:

Energieerhaltung: $dE_{pot} = -\vec{F}(\vec{r})d\vec{r} \,\Big|\, \cdot \frac{1}{dt}$

$$\underline{\underline{\frac{dE_{pot}}{dt}}} = -\vec{F}(\vec{r}) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = -\vec{F}(\vec{r}) \cdot \dot{\vec{r}} = -m \cdot \vec{a} \cdot \vec{\boldsymbol{u}} \overset{!}{=} -\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m\vec{\boldsymbol{u}}^2\right) = \underline{\underline{-\frac{dE_{kin}}{dt}}}\ ^{21}$$

$$\Rightarrow \frac{dE_{pot}}{dt} + \frac{dE_{kin}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(E_{pot} + E_{kin}\right) = 0 \text{ oder } E_{pot} + E_{kin} = \text{konst.}$$

Die Energieerhaltung in dieser Form gilt nur für konservative Kräfte ($\vec{F}$ nur abhängig vom Ort). {nicht von der Zeit oder der Geschwindigkeit}

Vorteil des Energiebegriffes gegenüber des Kraftbegriffes:

Energie: Skalar,

---

[20] $m \cdot a = m \cdot \ddot{\vec{r}} = \vec{F} \,\Big|\, \cdot \dot{\vec{r}} \Rightarrow \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} = \underline{\underline{\frac{dW}{dt}}} = m \cdot \ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = \frac{1}{2} m \frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}}^2\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m u^2\right) = \underline{\underline{\frac{dE_{kin}}{dt}}}$

[21] $\overset{!}{=}$ am besten rückwärts nachweisen (z.B. Produktregel!).

Kraft: Vektor.

Wenn wir wissen, daß die Energieerhaltung gilt, lassen sich viele Probleme mit dem Energieerhaltungssatz einfacher angehen als mit den Newtonschen Kraftgesetzen.[22]

Bsp.: Berechne die Geschwindigkeit $\boldsymbol{u}$ eines Körpers am Ort der Höhe $y = 0$, wenn er aus der Ruhe aus der Höhe $y = h$ eine reibungslose gekrümmte Kurve hinuntergleitet.[23]

Energieerhaltung: $E_{kin} + E_{pot} = \text{konst.}$:

$$\frac{1}{2} m\boldsymbol{u}_0^2 + m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} m\boldsymbol{u}^2 + m \cdot g \cdot 0, \quad \boldsymbol{u}_0 = 0:$$

$$m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} m\boldsymbol{u}^2 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\boldsymbol{u} = \sqrt{2gh}}}$$

Die Erfahrung zeigt uns, daß die Gesamtenergie E_{ges} eines abgeschlossenen Systems (dem keine Energie von außen ab- oder zugeführt wird) erhalten bleibt: $E_{ges} = \text{konst.} \Rightarrow \frac{dE_{ges}}{dt} = 0.$

Z.B. entzieht die Reibungskraft F_R einem bewegten Körper auf rauher Oberfläche (kinetische) Energie: $W_R = -F_R \cdot s < 0$, d.h. der Körper verrichtet Arbeit an seiner Umgebung: ⇨ Die aufeinander reibenden Flächen werden warm! D.h. die „innere Energie“ von Körper und Oberfläche wird erhöht: $E_{kin} + E_{pot} + E_{in} = \text{konst.}$[24]

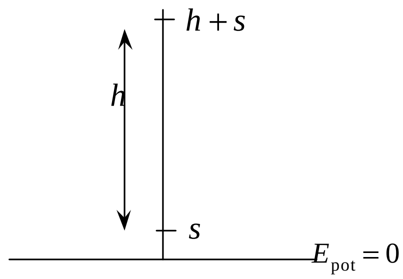
Allgemein gilt die **Energieerhaltung**:
Energie kann von einer Art in eine andere umgewandelt werden, aber sie kann nicht erzeugt oder vernichtet werden; die Gesamtenergie ist konstant.

Energiearten: Potentielle, kinetische, innere (Wärme), Schall, Licht, Elektrizität, nukleare,…

Bsp.: Ein Körper der Masse 1 kg fällt mit einer Anfangsgeschwindigkeit von $\boldsymbol{u}_0 = 14\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ aus 240 m Höhe in Sand. Er schlägt einen Krater von 20 cm Tiefe. Bestimme die durchschnittliche Kraft des Sandes, um den Körper zu bremsen.[25]

$$\frac{1}{2} m\boldsymbol{u}_0^2 + m \cdot g \cdot (h + s) = E_{in+Krater} = \overline{F} \cdot s$$ [26]

$$\Rightarrow \underline{\underline{\overline{F}}} = \frac{1}{s}\left(\frac{1}{2} m\boldsymbol{u}_0^2 + mg(h+s)\right) = \underline{\underline{12271.8\ \text{N}}}$$



---

[22] Obwohl die Energieerhaltung aus den Kraftgesetzen folgt.

[23] Die Hangabtriebskraft ist abhängig von der Neigung der Oberfläche ⇨ Beschleunigung a an jedem Punkt ⇨ Integrieren über den Weg. Aber:
Das Kraftfeld der Gravitation ist konservativ, andere Kräfte verrichten keine Arbeit ⇨ Energieerhaltung.

[24] $dE_{in} = -W_R$.

[25] Luftwiderstand vernachlässigen.

[26] $= -W_{stopp}$, $\vec{F} \downarrow\uparrow \vec{s}$