II Mechanik starrer Körper

Wir betrachten nun physikalische Körper mit Masse und Ausdehnung (Größe $\neq 0$).

4 Massenschwerpunkt

Für ausgedehnte Körper erweist sich der Begriff des Massenschwerpunktes als nützlich:

Def.: Der Massenschwerpunkt eines Körpers bestehend aus n Massenpunkten $m_1, m_2, \ldots, m_n$ liegt bei

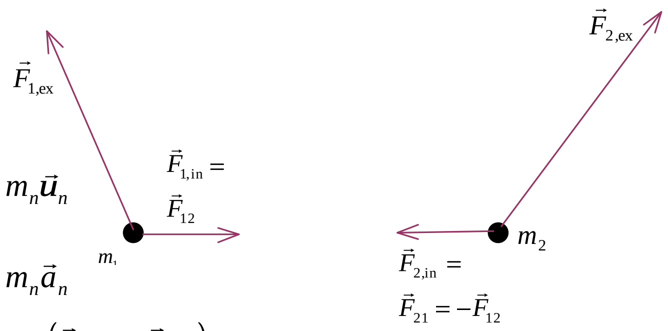
$$\vec{r}_S = \frac{1}{m_{ges}} \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i = \frac{m_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + m_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} + \ldots + m_n \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}}{m_1 + m_2 + \ldots m_n} = \begin{pmatrix} x_S \\ y_S \\ z_S \end{pmatrix}$$; das sind 3 Gleichungen!

Handelt es sich um einen Körper mit kontinuierlicher Massenverteilung[1], so wird

$$\vec{r}_S = \frac{1}{m_{ges}} \cdot \underbrace{\lim}_{\substack{\Delta m_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \vec{r}_i = \frac{1}{m_{ges}} \cdot \int \vec{r}\, dm = \frac{1}{m_{ges}} \int \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} dm = \begin{pmatrix} x_S \\ y_S \\ z_S \end{pmatrix} \qquad \text{(3 Gln.!)}$$

Legen wir den Ursprung unseres Bezugssystems genau in den Schwerpunkt des Körpers, so daß $\vec{r}_S = 0$, dann folgt $\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i = 0$ bzw. $\int \vec{r}\, dm = 0$.

Bewegung des Massenschwerpunktes:



$$m_{ges} \cdot \vec{r}_S = m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \ldots + m_n \vec{r}_n$$

$$m_{ges} \cdot \frac{d\vec{r}_S}{dt} = m_{ges} \cdot \vec{u}_S = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2 + \ldots + m_n \vec{u}_n$$

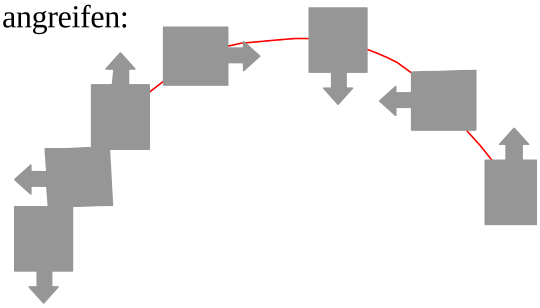
$$m_{ges} \cdot \frac{d^2 \vec{r}_S}{dt^2} = m_{ges} \cdot \vec{a}_S = m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 + \ldots + m_n \vec{a}_n$$

$$= \left(\vec{F}_{1,ex} + \vec{F}_{1,in}\right) + \left(\vec{F}_{2,ex} + \vec{F}_{2,in}\right) + \ldots + \left(\vec{F}_{n,ex} + \vec{F}_{n,in}\right)$$

$$= \vec{F}_{1,ex} + \vec{F}_{2,ex} + \ldots + \vec{F}_{n,ex}$$

Der Schwerpunkt eines starren Körpers bewegt sich so, als wäre die gesamte Körpermasse m_{ges} in ihm vereinigt und als würden alle äußeren Kräfte an ihm angreifen:

$$\boxed{m_{ges} \cdot \vec{a}_S = \vec{F}_{ex}}$$



5 Impuls

Def.: Der Impuls $\vec{p}$ eines Teilchens der Masse m und der Geschwindigkeit $\vec{u}$ ist gegeben durch

$$\boxed{\vec{p} = m \cdot \vec{u}\,.}$$ [2]

Das 2. Newtonsche Gesetzt lautet nun:

[1] D.h. Δm sehr klein, n sehr groß.

[2] Wie _ ist auch $\vec{p}$ abhängig vom Bezugssystem!

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}} = \frac{d}{dt}(m \cdot \vec{u})$$ [3]

$$= m \cdot \vec{a} \text{ (für konstante Masse).}$$

Für ein System von n Teilchen mit den Massen $m_1, m_2, \ldots, m_n$ ist der Gesamtimpuls $\vec{p}_{ges}$:

$$\underline{\underline{\vec{p}_{ges}}} = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 + \ldots + m_n\vec{u}_n = \underline{\underline{m_{ges} \cdot \vec{u}_S}} \, .$$

$$\frac{d\vec{p}_{ges}}{dt} = \frac{d}{dt}(m_{ges} \cdot \vec{u}_S) = m_{ges} \cdot \vec{a}_S = \vec{F}_{ex} \text{ (bei konstanter Masse)}$$

<u>Impulserhaltung:</u>

$\vec{F}_{ex} = \vec{0}: \quad \frac{d\vec{p}_{ges}}{dt} = \vec{0}:$ Greift an einem physikalischen System keine resultierende äußere Kraft an, so bleibt sein Gesamtimpuls erhalten: $\vec{p}_{ges} = \text{konst}$ (3 Gln!).[4]

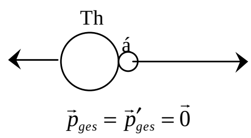
<u>Bsp.:</u> Rückstoß:

Wir betrachten den á-Zerfall von ruhendem $^{238}\text{U} \rightarrow {}^{234}\text{Th} + {}^{4}\text{He}$; das á-Teilchen habe eine Geschwindigkeit von $1{,}4 \cdot 10^7 \, \frac{\text{m}}{\text{s}}$ { und eine kinetische Energie von 4,1 MeV.}

Berechne die Rückstoßgeschwindigkeit des Tochternuklids ^{234}Th.

$$\vec{p}_{ges} = \vec{0} = m_a\vec{u}_a + m_{\text{Th}}\vec{u}_{\text{Th}} \quad \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{\vec{u}_{\text{Th}}}} = -\frac{m_a}{m_{\text{Th}}}\vec{u}_a = -\frac{4}{234} \cdot 1{,}4 \cdot 10^7 \, \frac{\text{m}}{\text{s}} = \underline{\underline{-\,2{,}39 \cdot 10^5 \, \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$$ [5]



6 Statik

Ein starrer Körper ist (in einem Inertialsystem) im „*mechanischen Gleichgewicht*“ wenn

- die Beschleunigung $\vec{a}_S$ seines Schwerpunktes 0 ist **und**
- die Winkelbeschleunigung $\dot{\vec{w}}$ um jede beliebige feste Achse 0 ist.

Ein Körper ist in „*statischem Gleichgewicht*“, wenn sogar gilt: $\vec{u}_S = \vec{0}$ und $\vec{w} = \vec{0}$.

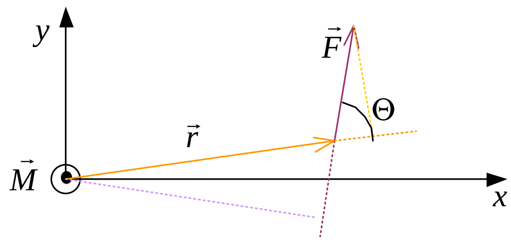
Ein Körper erfährt genau dann eine Winkelbeschleunigung $\dot{w}$ um eine Achse A, wenn ein Drehmoment mit einer Komponente $\vec{M}$ in Richtung von A an ihm angreift.

<u>Definition des Drehmoments $\vec{M}$:</u>

$$\boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}}$$ [6],

$\vec{F} =$ an dem Körper angreifende äußere Kraft

$\vec{r} =$ Ortsvektor des Kraftangriffspunktes, der Ursprung liegt in der Achse *A*.



---

[3] Diese Beziehung ist – im Gegensatz zu $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ – auch in der Relativitätstheorie richtig, wenn $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$.

[4] Neben Energie– und Impulserhaltung gibt es noch weitere Erhaltungssätze: z.B. el. Ladung, Drehimpuls…

[5] $E_{\text{kin}} = m_0 c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1 - b^2}} - 1\right], \quad b = \frac{u}{c}.$

[6] $M = r \cdot F \cdot \sin q = r \cdot F_\perp = F \cdot r_\perp = \text{Kraft} \cdot \text{Hebelarm}, \quad [\vec{M}] = \text{Nm, aber keine Arbeit!}$

Einheit: Nm.

So wie bei der translatorischen Bewegung das Newtonsche Kraftgesetz $F = m \cdot a$ gilt, so gilt in der Rotationsdynamik die Gleichung

$$\boxed{M = J_A \cdot \dot{w}}.$$

Dabei ist J_A das „*Massenträgheitsmoment*“ des Körpers bezüglich der Drehachse A, das für einen starren Körper mit kontinuierlicher Massenverteilung berechnet wird durch

$$\boxed{J_A = \int_{Körper} \tilde{r}^2 dm},$$

$\tilde{r}$ ist dabei jeweils der kürzeste Abstand eines jeden Massenelementes von der Drehachse A.[7]

Gleichgewichtsbedingungen

Im mechanischen Gleichgewicht müssen also zwei Bedingungen erfüllt sein:

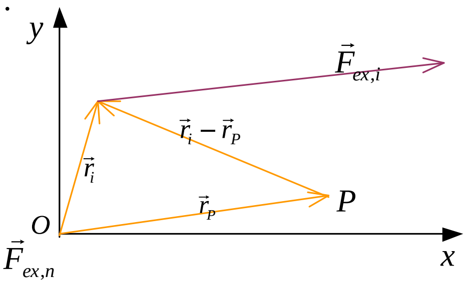
1) $\vec{a}_S = \vec{0} \Rightarrow \sum_i \vec{F}_{ex,i} = m\vec{a}_S = \vec{0}$

⇛ Die Vektorsumme aller am Körper angreifenden äußeren Kräfte muß null sein. Das sind drei skalare Gleichungen! (x,y,z-Richtung)

2) $\dot{\vec{w}} = \vec{0} \Rightarrow M = J\dot{w} = 0$

⇛ Die Vektorsumme[8] aller am Körper angreifenden äußeren Drehmomente muß null sein: $\sum_i \vec{M}_{ex,i} = 0$. Das sind wiederum drei skalare Gleichungen![9]

Die Wahl des Ursprungs O ist dabei unerheblich, denn solange der Körper unbeschleunigt ist, folgt aus $\vec{M}_{ex,O} = 0 \Rightarrow \vec{M}_{ex,P} = 0$ für jeden Punkt P.



Bew.: $\vec{a}_S = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_{ex} = \sum_i \vec{F}_{ex,i} = \vec{0}$

Es gilt für den Ursprung O:

$$\vec{M}_O = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{ex,1} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{ex,2} + \ldots + \vec{r}_n \times \vec{F}_{ex,n}$$

Für das Drehmoment um P gilt dann:

$$\vec{M}_P = (\vec{r}_1 - \vec{r}_P) \times \vec{F}_{ex,1} + (\vec{r}_2 - \vec{r}_P) \times \vec{F}_{exe,2} + \ldots + (\vec{r}_n - \vec{r}_P) \times \vec{F}_{ex,n}$$

$$= \underbrace{\left(\vec{r}_1 \times \vec{F}_{ex,1} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{ex,2} + \ldots + \vec{r}_n \times \vec{F}_{ex,n}\right)}_{\vec{M}_O} - \left[\vec{r}_P \times \underbrace{\left(\vec{F}_{ex,1} + \vec{F}_{ex,2} + \ldots + \vec{F}_{ex,n}\right)}_{=\vec{0}, \text{ da } \vec{a}_S = \vec{0}}\right]$$

$$\Rightarrow \vec{M}_P = \vec{M}_O$$ [10]

Im dreidimensionalen Raum haben wir also sechs Bedingungen für das Gleichgewicht eines starren Körpers! (3 für die Translation und drei für die Rotation)

In der Ebene bleiben drei Gleichgewichtsbedingungen: 2 für die Translation und 1 für die Rotation.

Rezept zum Lösen statischer Probleme:

---

[7] Die Rotationsenergie eines Massenpunktes beträgt: $E_{rot} = E_{kin} = \frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}m(w\tilde{r})^2 =: \frac{1}{2}Jw^2$. Entsprechend für den Drehimpuls $\vec{L} = J \cdot \vec{w}$, s. Kap. Gravitation S. 17.

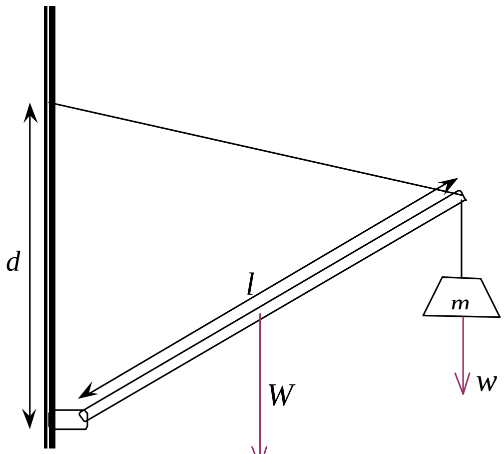
[8] Die Bedingung $\dot{\vec{w}} = \vec{0}$ soll ja für jede beliebige Drehachse gelten.

[9] Die Lage der kartesischen Achsen ist unerheblich.

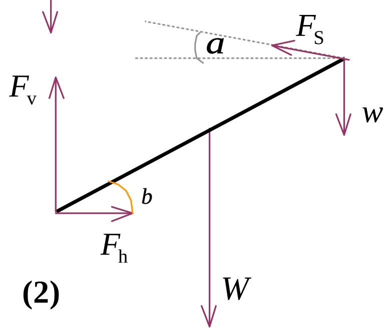
[10] $\Rightarrow \vec{M}_O = \vec{0} \Rightarrow \vec{M}_P = \vec{0}$

1) „Freischneiden“: Zeichne eine Grenze um das System, das im Gleichgewicht sein soll.
2) Zeichne <u>alle</u> am System angreifenden <u>äußeren</u> Kräfte ein, das sind alle, die von außerhalb des Schnittes wirken. Beachte Größe, Richtung und Angriffspunkt.
   Beispiele:
   – Gravitation greift im Schwerpunkt eines Körpers an, in dem seine gesamte Masse vereinigt gedacht werden kann
   – Kräfte, die über die Grenze kreuzende Seile, Stangen usw. übertragen werden.
3) Bed. 1): Translation: Wähle geeignetes Koordinatensystem für die drei Gleichungen.
4) Bed. 2): Rotation: Wähle (neues) geeignetes Koordinatensystem für die angreifenden Drehmomente (Ursprung am besten dort, wo die meisten Kräfte angreifen: $\Rightarrow\ \vec{M} = \vec{0}$).

<u>Bsp.:</u> Ein homogener Balken mit Gewicht W und Länge l hängt in einem Scharnier an der Wand. Über einen Draht, der an seinem anderen Ende sowie an der Wand im Abstand d oberhalb des Scharniers befestigt ist, wird der Balken so hoch gehalten, daß er einen Winkel $\boldsymbol{b}$ mit der Horizontalen einschließt. Zusätzlich hängt ein Gewicht w an einem Seil an seinem oberen Ende. Berechne die Spannung im Draht und die Kräfte, die das Scharnier auf den Balken ausübt.



(Werte: $W = 60\text{N}, w = 40\text{N}, l = 3\text{m}, d = 2\text{m}, \boldsymbol{b} = 30^0$.)



Bed.1): x-Richtung →:

$$\vec{F}_h + \vec{F}_S \cos\boldsymbol{a} = \vec{0} \;\Rightarrow\; F_h - F_S\cos\boldsymbol{a} = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

y-Richtung ↑:

$$\vec{F}_v + \vec{F}_S \sin\boldsymbol{a} + \vec{W} + \vec{w} = \vec{0} \;\Rightarrow\; F_v + F_S\sin\boldsymbol{a} - W - w = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

Bed.2): Rotation um oberen Punkt {3 Kräfte}[11] :

$$W\cdot\frac{l}{2}\cos\boldsymbol{b} - F_v\cdot l\cos\boldsymbol{b} + F_h l\sin\boldsymbol{b} = 0 \qquad \textbf{(3)}$$

Da Seile (und Drähte) im Gegensatz zu Balken (und Stangen) nur Zug-Kräfte in Richtung des Seils aufnehmen können, gilt:

$$\tan\boldsymbol{a} = \frac{d - l\sin\boldsymbol{b}}{l\cos\boldsymbol{b}} = \frac{d}{l\cos\boldsymbol{b}} - \tan\boldsymbol{b} =: K \qquad \textbf{(4)}$$

$\Rightarrow$ 4 Gln. für 4 Unbekannte $F_S,\ F_h,\ F_v, \boldsymbol{a}$.

(4´): $\boldsymbol{a} = \arctan K = 10{,}89^0$

(1’): $F_h = F_S\cos\boldsymbol{a}$

(2’): $F_v = W + w - F_S\sin\boldsymbol{a}$

(1’), (2’) in (3):

$$W\cdot\frac{l}{2}\cos\boldsymbol{b} - \left(W + w - F_S\sin\boldsymbol{a}\right)l\cos\boldsymbol{b} + F_S\cos\boldsymbol{a}\,l\sin\boldsymbol{b} = 0 \,\Big|\, : l\cos\boldsymbol{b}$$

[11] Rotation um unteren Punkt: $-W\cdot\frac{l}{2}\cos b - wl\cos b + F_S l\sin(a+b) = 0$.

$$\frac{W}{2} - W - w + F_S \sin\alpha + F_S \cos\alpha \tan\beta = 0$$

$$\Rightarrow F_S = \frac{W/2 + w}{\sin\alpha + \cos\alpha \tan\beta} = 92{,}6\ \mathrm{N}$$

(1'): $\underline{\underline{F_h = 90.9\ \mathrm{N}}}$

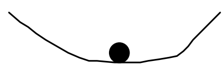
(2'): $\underline{\underline{F_v}} = W + w - F_S \sin\alpha \underline{\underline{= 82.5\ \mathrm{N}}}$.

Arten des Gleichgewichts

Für konservative Kraftfelder gilt: $\vec{F}(\vec{r}) = -\mathrm{grad} E_{pot}(\vec{r}) = -\begin{pmatrix} \partial E_{pot}/\partial x \\ \partial E_{pot}/\partial y \\ \partial E_{pot}/\partial z \end{pmatrix}$ $\left\{\begin{matrix}\text{s. Kap. "Potentielle} \\ \text{Energie" S. 8}\end{matrix}\right\}$.

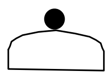
$\vec{F}_{äußere} = 0$ bedeutet somit: Die Ableitung von $E_{pot}\left(\vec{r}_{Gleichgewicht}\right)$, d.h. die Änderung der potentiellen Energie in beliebiger Richtung ist null.
Dafür gibt es drei Möglichkeiten (betrachte zunächst nur eine Dimension x):

E_{pot} = Minimum: $\frac{d^2 E_{pot}}{dx^2} > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dF}{dx} = -\frac{d^2 E_{pot}}{dx^2} < 0 \quad \Rightarrow$



Eine Auslenkung in $+x-$Richtung bewirkt eine rücktreibende Kraft in $-x-$Richtung und umgekehrt ➔ **stabiles Gleichgewicht**

E_{pot} = Maximum : $\frac{d^2 E_{pot}}{dx^2} < 0 \Rightarrow \frac{dF}{dx} > 0 \Rightarrow$



Eine Auslenkung in $+x-$Richtung bewirkt eine weitere Beschleunigung in $+x-$Richtung ➔ **instabiles Gleichgewicht** (oder **labiles Gl.gewicht**).

E_{pot} = konstant: $\frac{d^2 E_{pot}}{dx^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dF}{dx} = 0 \quad \Rightarrow$

Bei einer Auslenkung treten keine weiteren Kräfte auf ➔ **indifferentes Glg.**

<u>Bem.:</u> *Sattelpunkt:* Ein Körper kann in einer Richtung im stabilen, in einer anderen im labilen Gleichgewicht sein.

7 Gravitation

Als Assistent von Tycho Brahe (1546-1601) analysierte und interpretierte Johannes Kepler (1571-1630)[12] die zahlreichen, von Brahe aufgenommenen Daten über die Planetenbewegungen. Rein empirisch gelangte Kepler somit zu folgenden Gesetzmäßigkeiten:

1. Alle Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.
2. Denkt man sich eine gerade Linie, die die Sonne mit einem der Planeten verbindet, so überstreicht diese Linie in gleichen Zeiten gleiche Flächen.
3. Das Quadrat der Umlaufzeit eines Planeten um die Sonne dividiert durch die dritte Potenz der großen Halbachse seiner Umlaufbahn ist (innerhalb des Sonnensystems) für alle Planeten identisch.

[12] Bei Prag. Fernrohre wurden erst um 1600 entwickelt. Kepler beobachtete wohl nicht (kurzsichtig) (Ley. Himmelskunde S. 109 ff). Entfernungsbestimmung der Planeten: Parallaxen mit Erdradius oder Erdbahnradius als Basis.

Es war ein großer Erfolg für Isaac Newtons (1642-1727) Gravitationstheorie, daß er nun Keplers Gesetze *herleiten* konnte!

<u>Gravitationsgesetz:</u> Zwei Körper der Massen m_1 bzw. m_2, die den Abstand r voneinander haben, unterliegen einer gegenseitigen Anziehungskraft der Größe

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

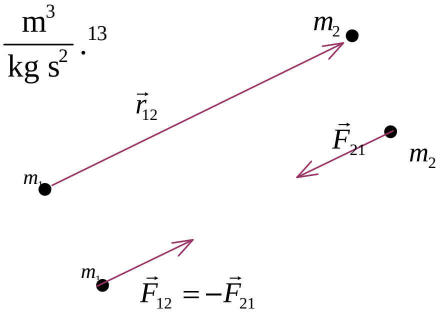
die entlang der Verbindungslinie zwischen beiden Körpern wirkt. G ist eine Universalkonstante (Gravitationskonstante) und beträgt

$$G = 6.672 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\ s}^2}.$$ [13]

Vektorform: $$\vec{F}_{21} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^3}\vec{r}_{12}$$ [14]

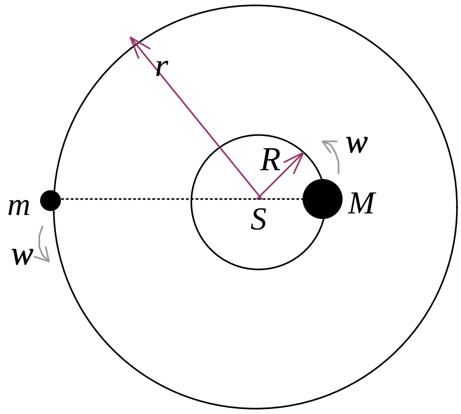
Die Gravitationskraft nimmt quadratisch mit dem Abstand ab:

$$F \propto \frac{1}{r^2}.$$



Planetenbahnen

Wir betrachten zwei Massen m und M, die sich auf Kreisbahnen[15] mit den Radien r bzw. R mit der gemeinsamen Winkelgeschwindigkeit w um den Schwerpunkt S (mit $mr = MR$) bewegen. S sei der Ursprung unseres Koordinatensystems. Die dafür notwendige Zentripetalkraft ist die Gravitationskraft:



$$m w^2 r = M w^2 R = G\frac{mM}{(r+R)^2}. \qquad \textbf{(1)}$$ [16]

Ist M wesentlich größer als m, wie es bei Planetenbahnen um die Sonne der Fall ist, so ist R gegen r vernachlässigbar, und **Gl. (1)** wird zu

$$GM_{Sonne} = w^2 r^3.$$

Mit $w = \frac{2p}{T}$, T = Umlaufzeit des Planeten um die Sonne

erhalten wir

$$GM_{Sonne} = \frac{4p^2 r^3}{T^2}.$$

Diese Gleichung gilt auch für Ellipsenbahnen, wenn r die große Halbachse bezeichnet.[17]

Daraus folgt das dritte Keplersche Gesetz:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4p^2}{GM},$$

a bezeichnet die große Halbachse der Ellipsenbahn,

M ist die Masse des Zentralkörpers.

---

[13] Durch exakte Messungen bestimmt. In der mantisse ,67259 ist die 9 bereits unsicher! (Sp.d.W. 3/2000)

[14] $\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}$ = Einheitsvektor in Richtung von $\vec{r}_{12}$.

[15] Eigentlich Ellipsen; in den meisten Fällen unterscheiden sich diese aber wenig von Kreisen.

[16] Erste Gleichung: Kraft = Gegenkraft bzw. Schwerpunkt (s.o.).

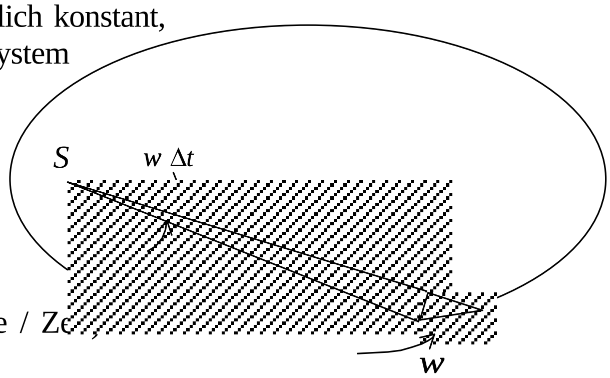
[17] s. Gerthsen S. 39.

➢ Der Quotient aus dem Quadrat der Umlaufzeit und der dritten Potenz der großen Halbachse ist somit innerhalb eines Zentralkörpersystems konstant. Die Masse des umlaufenden Körpers geht nicht in das Verhältnis ein.[18]

Das zweite Keplersche Gesetz ist für Kreisbahnen trivialerweise erfüllt. Für den allgemeinen Fall benötigen wir zunächst den Begriff des Drehimpulses $\vec{L}$:
Bewegt sich ein Massenpunkt um eine Drehachse A, so ist sein **Drehimpuls *L*** gegeben durch

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$	$\vec{r}$ = Abstand von der Drehachse
	$\vec{p} = m \cdot \vec{u}$ = Impuls des Massenpunktes.

So, wie sich der lineare Impuls $\vec{p}$ eines Massenpunktes nur unter dem Einfluß äußerer Kräfte zeitlich ändert, so ist auch der Drehimpuls $\vec{L}$ zeitlich konstant, sofern kein äußeres Drehmoment an dem System angreift.[19]



Für den Fall des um einen Zentralkörper umlaufenden Körpers ist die in der Zeit Δt überstrichene Fläche gegeben durch

$$\frac{1}{2} \cdot r \cdot (rw\Delta t).$$ [20]

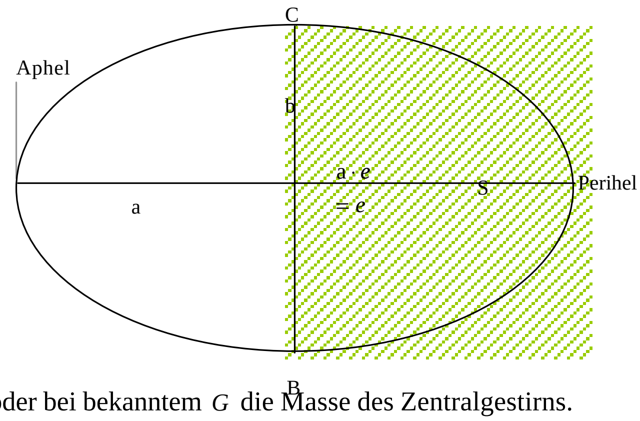
Die momentane „Flächengeschwindigkeit“ (Fläche / Ze ist dann

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{1}{2} r (rw\Delta t)}{\Delta t} = \frac{1}{2} wr^2.$$

Da mwr^2 aber genau der Drehimpuls des umlaufenden Körpers ist[21], der sich wegen Abwesenheit äußerer Drehmomente[22] zeitlich nicht ändert, ist somit auch die Flächengeschwindigkeit konstant. Dieses Gesetz gilt für jede Zentralkraft, unabhängig von ihrer Abstandsabhängigkeit oder sonstiger Körpereigenschaften. $\Rightarrow$ 2. Keplersches Gesetz.

Erst die genaue $1/r^2$-Abhängigkeit der Gravitationskraft zwingt die Himmelskörper auf elliptische Bahnen mit der Sonne in einem der Brennpunkte (erstes Keplersches Gesetz).[23]

<u>Bsp.:</u> Ein Planet umrundet die Sonne auf einer Ellipse mit Exzentrizität e. Bestimmen Sie das Verhältnis der Zeiten, die der Planet braucht, um auf dem Weg durch das Perihel vom Punkt B zum Punkt C seiner Bahn zu gelangen (die Enden der kleinen Halbachse) und der Zeit für einen gesamten Umlauf.
Konstante Flächengeschwindigkeit:



---

[18] Aus Beobachtungen läßt sich nun also G bestimmen, oder bei bekanntem G die Masse des Zentralgestirns.

[19] $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \Leftrightarrow \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

[20] Wir machen hier einen Fehler durch Vernachlässigung des äußersten Dreiecks. Dieser Fehler geht aber im Grenzübergang gegen 0.

[21] $L = m \cdot |\vec{r} \times \vec{u}| = m \cdot r \cdot u_j = mr \cdot w \cdot r = mr^2 \cdot w \cdot \{\vec{r} \perp \vec{w}, \quad \vec{u} \neg\perp \vec{r}\ !\}$

[22] Die Zentralkraft hat den Hebelarm 0!

[23] a) s. Weigert: Astronomie + Astrophysik S. 27 u. Szabó S. 318 Aufg. 20
b) Einfacher ist die Frage zu lösen: Wie muß das Kraftfeld beschaffen sein, damit sich die Körper auf Kegelschnittbahnen bewegen? s. Gerthsen Kap 1.7.4 „Planetenbahnen“ und Greiner, Aufg. 26.2.

$$\frac{A}{T} = \frac{A'}{t}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\frac{t}{T}}} = \frac{A'}{A} = \frac{\frac{1}{2}A - A''(BCS)}{A} = \frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{2}(2b)ae}{\pi ab} = \underline{\underline{\frac{1}{2} - \frac{e}{\pi}}}.$$ [24]

Potentielle Energie

Die Änderung der potentiellen Energie ΔE_{pot} war für ein konservatives Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$ definiert zu (s. Kap. Potentielle Energie S. 8)

$$\Delta E_{pot} = -\int_a^b \vec{F}(\vec{r})d\vec{r} = E_{pot}(b) - E_{pot}(a)$$

$$\Rightarrow E_{pot}(b) = E_{pot}(a) - \int_a^b \vec{F}(\vec{r})d\vec{r}.$$

Wo legen wir das Nullniveau $E_{pot} = 0$ hin?

Bei der Betrachtung großer Abstände ($r \geq R_E$) erweist es sich als praktisch, das Nullniveau ins Unendliche zu legen:

Konvention: $E_{pot}(r \to \infty) = 0$.

$$\Rightarrow E_{pot}(\vec{r}) = -\int_\infty^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r})d\vec{r} = -\int_\infty^r -G\frac{mM}{r^2}dr = -G\frac{mM}{r}\bigg|_\infty^r = -G\frac{mM}{r} < 0.$$

<u>Bsp.:</u> *Fluchtgeschwindigkeit:*

Wie groß muß die Geschwindigkeit eines Körpers sein, um ihn aus dem Gravitationsfeld der Erde zu befördern?

$$E_{pot}(R_E) = -G\frac{mM_E}{R_E}, \quad E_{pot}(\infty) = 0$$

$$\Delta E_{pot} = E_{kin}:$$

$$G\frac{mM_E}{R_E} = \frac{1}{2}mu_{Flucht}^2$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{u_{Flucht}}} = \sqrt{\frac{2GM_E}{R_E}} \underline{\underline{= 11.2 \ \tfrac{\text{km}}{\text{s}}}}.$$

[24] Kreisbahn: $\frac{t}{T} = \frac{1}{2}$.