

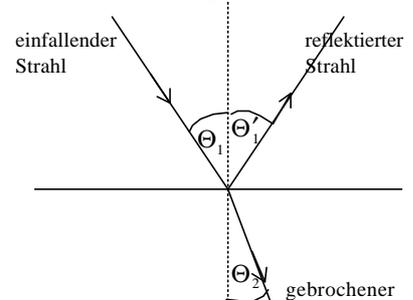
# B Optik

## I Geometrische Optik

### 1. Reflexion

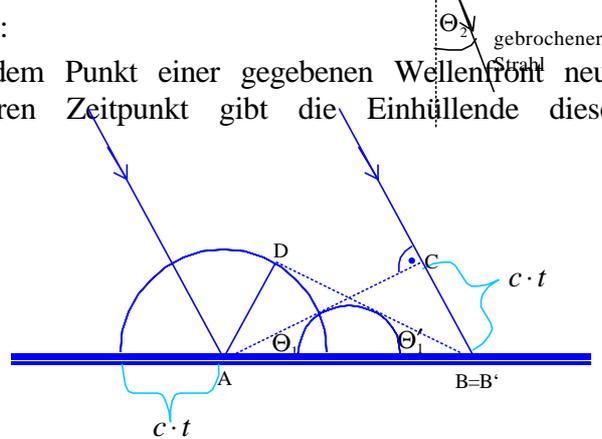
Ein Lichtstrahl, der auf eine Wasseroberfläche trifft, wird sowohl reflektiert als auch gebrochen. Das Experiment zeigt:

- i) Reflektierter und gebrochener Strahl liegen in derselben Ebene, die vom einfallenden Strahl und von Lot auf die Oberfläche am Auftreffpunkt aufgespannt wird.
- ii) Reflexion:  $\Theta_1 = \Theta_1'$ , d.h. Einfallswinkel = Reflexionswinkel.



Plausible Erklärung mit dem Huygens'schen Prinzip<sup>1</sup>:

Zu einem gewissen Zeitpunkt lässt man von jedem Punkt einer gegebenen Wellenfront neue „Elementarwellen“ ausgehen. Zu einem späteren Zeitpunkt gibt die Einhüllende dieser Elementarwellen die neue Wellenfront.



Reflexion: Wegen  $\overline{AD} = \overline{CB}$ ,  
 $\overline{AB} = \overline{AB'}$  und  
 $\sphericalangle D = \sphericalangle C = 90^\circ$  ist  
 $\triangle ADB \cong \triangle ACB$

$$\Rightarrow \Theta_1 = \Theta_1' \Rightarrow \text{Reflexionsgesetz}$$

Senkrechter Eintritt von Medium mit Brechungsindex  $n_1$  in ein Medium mit Brechungsindex  $n_2$ :

$$\text{Reflexionskoeffizient } R = \frac{I_{\text{refl}}}{I_{\text{einf}}} = \left( \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2.$$

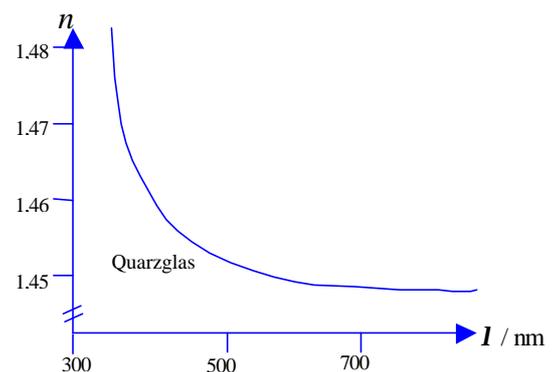
### 2. Brechung

iii) Brechung:

$$\frac{\sin \Theta_1}{\sin \Theta_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

Snellius'sches Brechungsgesetz.

$n_i$  ist der „Brechungsindex“ des jeweiligen Mediums<sup>3</sup>  
 $n$  ist aber abhängig von der Wellenlänge  $\Rightarrow$  Spektrum<sup>4</sup>.



Bsp.: Ein Lichtstrahl enthält die beiden Wellenlängen 400 nm und 500 nm. Er fällt von Luft auf eine ebene Quarz-Oberfläche und schließt dabei mit der  $\perp$  einen Winkel von  $30^\circ$  ein. Der

<sup>1</sup> 1678

<sup>2</sup> Aus Energieerhaltung und Stetigkeit der tangentialen el. Feldstärke an der Grenzfläche, s. Gerthsen S. 393.

<sup>3</sup> Vakuum:  $n = 1$ ; Luft:  $n = 1.0003$ , Wasser:  $n = 1.33$ , Glas:  $1.4 < n < 1.7$ . Für  $\lambda = 589 \text{ nm}$ .

<sup>4</sup> Das Reflexions- und das Brechungsgesetz gilt für gesamtes e.m. Spektrum.

Brechungsindex von Quarz relativ zu Luft ist  $\left. \begin{matrix} n_Q = 1.4702 \\ n_L = 1.4624 \end{matrix} \right\}$  für  $\begin{matrix} 400 \text{ nm} \\ 500 \text{ nm} \end{matrix}$ . Welchen Winkel schließen die gebrochenen Strahlen ein?

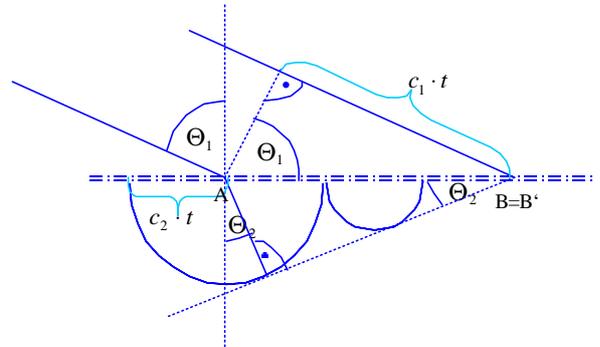
$$\sin \Theta_2 = \frac{\sin \Theta_1}{\frac{n_Q}{n_L}} \Rightarrow \Theta_2 = \left. \begin{matrix} 19.88^\circ \\ 19.99^\circ \end{matrix} \right\} \text{ für } \begin{matrix} 400 \text{ nm} \\ 500 \text{ nm} \end{matrix} \Rightarrow \underline{\Delta \Theta_2 = 0.11^\circ},$$

400 nm wird stärker gebrochen.

Brechung:  $\sin \Theta_1 = \frac{c_1 t}{AB}$

$$\sin \Theta_2 = \frac{c_2 t}{AB'} \Rightarrow \frac{\sin \Theta_1}{\sin \Theta_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

$$\Rightarrow c_i = \frac{c_{\text{Vakuum}}}{n_i} \quad 5$$



Fermat-Prinzip: Das Licht verläuft zwischen zwei Punkten  $A$  und  $B$  so, daß es dafür möglichst kurze Zeit braucht.

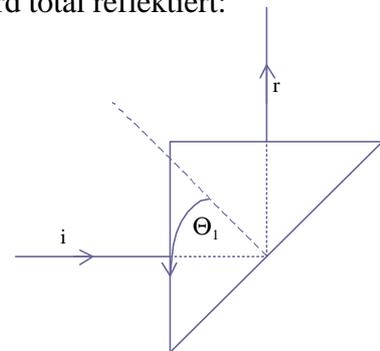
### Totalreflexion

Trifft ein Lichtstrahl von einem optisch dichteren Medium auf die Grenze zu einem optisch dünneren, so existiert ein kritischer Einfallswinkel  $\Theta_c$ , für den der Brechungswinkel  $\Theta_2 = 90^\circ$  ist. Für größere Einfallswinkel gibt es keinen gebrochenen Strahl, sondern er wird total reflektiert:

$$\sin \Theta_c = \frac{n_2}{n_1}, \quad n_2 < n_1.$$

Bsp.: Ein Strahl fällt  $\perp$  in ein Glasprisma ein und wird unter  $\Theta_1 = 45^\circ$  total reflektiert. Was können Sie daraus über den Brechungsindex des Glases schließen?

$$\sin 45^\circ > \frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{n} \Rightarrow \underline{\underline{n > \frac{1}{\sin 45^\circ} = 1.41}}.$$



### 3. Absorption

Beim Durchgang durch Materie wird Strahlung in andere Energieformen (vornehmlich Wärme) umgewandelt und dadurch folglich geschwächt. Dieser Vorgang heißt „Absorption“<sup>6</sup>. Die relative Abnahme der Intensität  $I$  ist dabei proportional zur Schichtdicke  $dx$ :

$$\frac{dI}{I} = -a \cdot dx.$$

Integration ergibt den Intensitätsverlauf in Abhängigkeit von der Eindringtiefe  $x$ :

$$I(x) = I(0) \cdot e^{-ax} \quad \text{“Beer’sches Gesetz“}.$$

<sup>5</sup> Oder  $n_i = \frac{c_{\text{Vakuum}}}{c_i}$ .

<sup>6</sup> Bei der „Streuung“ ändert die Strahlung nur ihre Ausbreitungsrichtung, bleibt aber Strahlung.

$a$  heißt „Absorptionskoeffizient“. Er ist eine Stoffkonstante und hat die Dimension  $\frac{1}{m}$ .

Die Wellenlängenabhängigkeit  $a(\lambda)$  ist meist sehr kompliziert. Im Spektrum gibt es meist

- linienhafte Anteile: gebundene Ladungen werden in erzwungene Schwingungen versetzt, oder Hüllelektronen werden angeregt (je nach Energie der Photonen),
- kontinuierliche Anteile: quasifreie Elektronen (z.B. in Metallen) werden in Schwingungen versetzt und erzeugen somit einen Stromfluß, der durch den elektrischen Widerstand des Materials Wärme erzeugt.

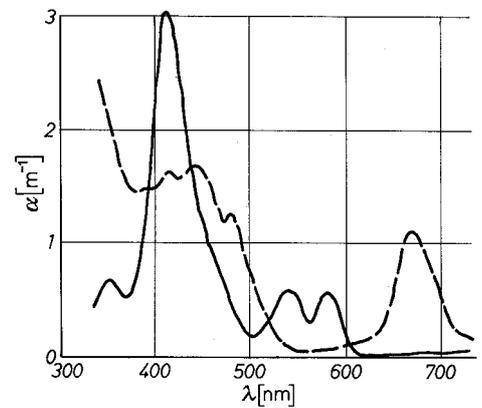


Abb. 10.63. Absorptionsspektren von zwei der für uns wichtigsten Substanzen: - - - Chlorophyll, ——— Hämoglobin (genauer: Chlorophyll a, Oxyhämoglobin vom Menschen). Daß Blätter grün und Blut rot (in sehr dünner Schicht gelb) sind, läßt sich daraus sofort ablesen. Ob und warum aber die Absorptionsmaxima so liegen müssen, ist beim Chlorophyll nur zum Teil und beim Hämoglobin so gut wie gar nicht bekannt

## II Wellenoptik

### 4. Einführung

Bisher betrachteten wir die Ausbreitung von Lichtstrahlen. Die geometrischen Gesetze für die Reflexion und Brechung gelten aber nur, solange die Oberfläche groß ist gegen die Wellenlänge  $\lambda$ , und die Unebenheiten klein sind gegen die Wellenlänge. Treffen diese Bedingungen nicht zu  $\Leftrightarrow$  Wellenoptik. Z.B. ist es nicht möglich, einen einzelnen Lichtstrahl durch einen schmalen Schlitz auszublenden (Beugung!). S. Huygens'sches Prinzip.

Grundlegende Begriffe von Wellen:

Die Wellenoptik beschäftigt sich mit der Ausbreitung von elektromagnetischen (em) Wellen. In em Wellen oszilliert das elektrische Feld  $\vec{E}$  und die magnetische Flußdichte  $\vec{B}$  sinusförmig. Beide Feldvektoren stehen senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung der Welle (Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c$  = Lichtgeschwindigkeit in Vakuum); und  $\vec{E}$ - und  $\vec{B}$ -Feld stehen wiederum senkrecht aufeinander. Bei sich ausbreitenden Wellen schwingen  $\vec{E}$ - und  $\vec{B}$ -Feld in Phase.

Wir definieren die Wellenzahl  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  und die Kreisfrequenz  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ,  $T$  = Schwingungsperiode.

Die Frequenz  $\nu$  ist der Kehrwert der Periode:  $\nu = \frac{1}{T}$ .

Für die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c$  einer Welle gilt  $c = \nu \cdot \lambda$ .

### 5 Intensität

Die Intensität einer Welle ist die pro Zeit durch eine Fläche transportierte Energie.

Die Energiedichte (Energie pro Volumen) des elektrischen Feldes beträgt

$$w_{el} = \frac{\epsilon_0}{2} E^2, \quad \epsilon_0 = \text{elektrische Feldkonstante,}$$

$E$  = elektrische Feldstärke.

Die Energiedichte des magnetischen Feldes beträgt

$$w_{mag} = \frac{1}{2\mu_0} B^2, \quad \mu_0 = \text{magnetische Feldkonstante,}$$

$B$  = magnetische Flußdichte.

In e.m.-Wellen sind E- und B-Feld in Phase; es gelten die Beziehungen

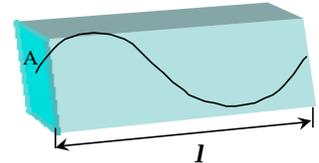
$$E = c \cdot B \quad \text{und} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

Damit ist die gesamte Energiedichte in einer e.m.-Welle gegeben durch

$$w_{e.m} = w_{el} + w_{mag} = \epsilon_0 E^2.$$

Wir betrachten einen Quader der Länge  $l$  mit der Querschnittsfläche  $A$ . In diesem steckt dann die Gesamtenergie

$$W_{em} = A \cdot \int_0^l w_{em} dx = A \cdot \epsilon_0 \int_0^l E_0^2 \sin^2(kx - \omega t) dx = A \cdot \epsilon_0 \cdot E_0^2 \cdot \frac{l}{2}.$$



Die Intensität der Welle ist die durch die Fläche  $A$  strömende Leistung:

$$I = \frac{W_{em}}{A \cdot T} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \cdot c \cdot E_0^2.$$

Die Intensität einer Welle ist proportional zum Quadrat ihrer Amplitude.

## 6 Interferenz

Überlagern sich zwei harmonische Wellen gleicher Wellenlänge, Frequenz und Amplitude, so ist die resultierende Welle wieder harmonisch:

$$= 2E_0 \cos\left(\frac{j}{2}\right) \cdot \sin\left(kx - \omega t - \frac{j}{2}\right) \Rightarrow \omega \text{ bleibt gleich, } k \text{ bleibt gleich.}$$

$$E_1 = E_0 \sin(kx - \omega t - j)$$

$$E_2 = E_0 \sin(kx - \omega t)$$

$$E = E_1 + E_2 = E_0 [\sin(kx - \omega t - j) + \sin(kx - \omega t)] =$$

<sup>7</sup> Amplitude:  $\approx$  doppelt so groß, wenn  $j \ll 1$  (konstruktive Überlagerung)  
 $\approx 0$ , wenn  $j \approx \pi$  (destruktive Interferenz)

Auch bei unterschiedlicher Amplitude ist die Resultierende eine harmonische Welle gleicher Frequenz und Wellenlänge.<sup>8</sup>

### Kohärenz

Interferenz kann nur auftreten, wenn die Phasendifferenz der sich überlagernden Wellen zeitlich konstant ist  $\Leftrightarrow$  „kohärente Wellen“:

Zwei voneinander unabhängige Lichtquellen führen nicht zur Interferenz  $\Leftrightarrow$  „inkohärente Lichtquellen“.<sup>9</sup>

### 6.1 Doppelspalt

Zwei Punktquellen, die Licht gleicher Wellenlänge emittieren, erzeugen Interferenzringe.

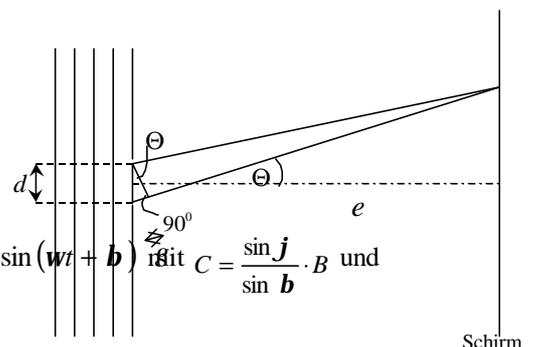
Bild: Interferenz

$$^7 \sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{b-a}{2}$$

<sup>8</sup>  $A \sin(\omega t) + B \sin(\omega t + j)$  im Zeigerdiagramm: Resultierende =  $C \sin(\omega t + b)$  mit  $C = \frac{\sin j}{\sin b} \cdot B$  und

$\frac{\sin b}{B} = \frac{\sin(j-b)}{A}$ . S. auch Kap 5.1 Beugung am Einzelspalt.

<sup>9</sup>  $l$  verschieden, kein Zeitbezug.



Helle Streifen treten auf, wenn für  $\Theta$  gilt ( $e \gg d^{10}$ ):

$$\left. \begin{aligned} g &= d \cdot \sin \Theta = m \cdot \mathbf{I} \quad (\text{= Gangunterschied}) \\ \text{dunkle Streifen (Auslöschung) tritt auf für} \\ g &= d \cdot \sin \Theta = \left(m + \frac{1}{2}\right) \mathbf{I} \end{aligned} \right\} m = 0, 1, 2, \dots$$

Berechnung der Intensität auf dem Schirm:

Erinnerung:

Die Intensität einer Welle ist proportional zum Quadrat ihrer Amplitude.<sup>11</sup>

$$E_1 = E_0 \sin(\mathbf{w})$$

$$E_2 = E_0 \sin(\mathbf{w} + \mathbf{j}), \quad \mathbf{j} = \text{Phasendifferenz, abhängig von } \Theta.$$

Die resultierende Amplitude  $E_\Theta$  ist gegeben durch

$$\begin{aligned} E &= E_1 + E_2^{12} \\ &= \underbrace{2E_0 \cos \frac{\mathbf{j}}{2}}_{\uparrow} \cdot \sin\left(\mathbf{w} + \frac{\mathbf{j}}{2}\right)^{13} \\ &= E_\Theta \sin\left(\mathbf{w} + \frac{\mathbf{j}}{2}\right)^{14}. \end{aligned}$$

Da die Intensität einer Welle proportional zu ihrem Amplitudenquadrat ist, ist

$$I(\Theta) \propto E_\Theta^2.$$

Wegen  $\mathbf{j} = \frac{g}{\mathbf{I}} \cdot 2\mathbf{p} = \frac{2\mathbf{p}}{\mathbf{I}} \cdot d \sin \Theta$  ist schließlich

$$\boxed{I(\Theta) \propto 4E_0^2 \cos^2 \frac{\mathbf{j}}{2} = 4E_0^2 \cos^2 \left[ \frac{\mathbf{p} \cdot d}{\mathbf{I}} \sin \Theta \right]}$$

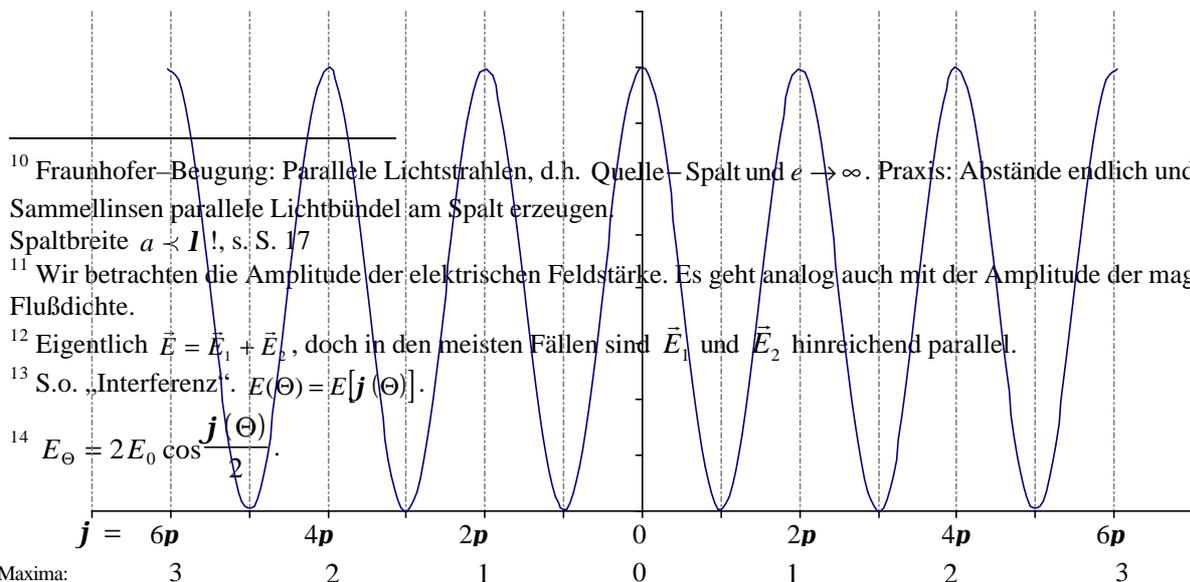
Maxima:  $I(\Theta) \propto 4E_0^2 = 4I_1$  für  $\frac{\mathbf{p} \cdot d \sin \Theta}{\mathbf{I}} = m \cdot \mathbf{p}$

$$\Leftrightarrow d \sin \Theta = m \cdot \mathbf{I}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{s.o.})$$

Minima:  $I(\Theta) = 0$  für  $\frac{\mathbf{p} \cdot d \sin \Theta}{\mathbf{I}} = \left(m + \frac{1}{2}\right) \cdot \mathbf{p}$

$$\Leftrightarrow d \sin \Theta = \left(m + \frac{1}{2}\right) \cdot \mathbf{I}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

$$y = 4 \cos^2(\phi/2)$$



<sup>10</sup> Fraunhofer-Beugung: Parallele Lichtstrahlen, d.h. Quelle-Spalt und  $e \rightarrow \infty$ . Praxis: Abstände endlich und mit Sammellinsen parallele Lichtbündel am Spalt erzeugen. Spaltbreite  $a \ll \mathbf{I}$ !, s.: S. 17

<sup>11</sup> Wir betrachten die Amplitude der elektrischen Feldstärke. Es geht analog auch mit der Amplitude der magnetischen Flußdichte.

<sup>12</sup> Eigentlich  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ , doch in den meisten Fällen sind  $\vec{E}_1$  und  $\vec{E}_2$  hinreichend parallel.

<sup>13</sup> S.o. „Interferenz“.  $E(\Theta) = E[\mathbf{j}(\Theta)]$ .

<sup>14</sup>  $E_\Theta = 2E_0 \cos \frac{\mathbf{j}(\Theta)}{2}$ .

## 6.2 Interferenz an dünnen Schichten

Bsp.: Seifenblasen, Ölpfützen.

Für nahezu  $\perp$  Einfall ( $\Theta \approx 0$ ) haben die beiden interferierenden Wellen eine Wegdifferenz von  $\approx 2d$ . Welche Phasendifferenz haben die beiden Wellen?

- ◆ Die Wellenlänge  $\lambda_n$  im Medium beträgt  $\lambda_n = \frac{\lambda_{\text{Vakuum}}}{n}$ .
- ◆ Bei Reflexion am optisch dichteren Medium erfährt die Welle einen Phasensprung um  $\pi$ .

Interferenzmaximum für

$$\underbrace{n \cdot 2d}_{\text{optisch Weglänge}} = \left(m - \frac{1}{2}\right) \lambda, \quad m = 1, 2, \dots$$

Interferenzminimum für

$$n \cdot 2d = m \cdot \lambda, \quad m = 1, 2, \dots$$

$\lambda$  ist hier im Vakuum genommen!

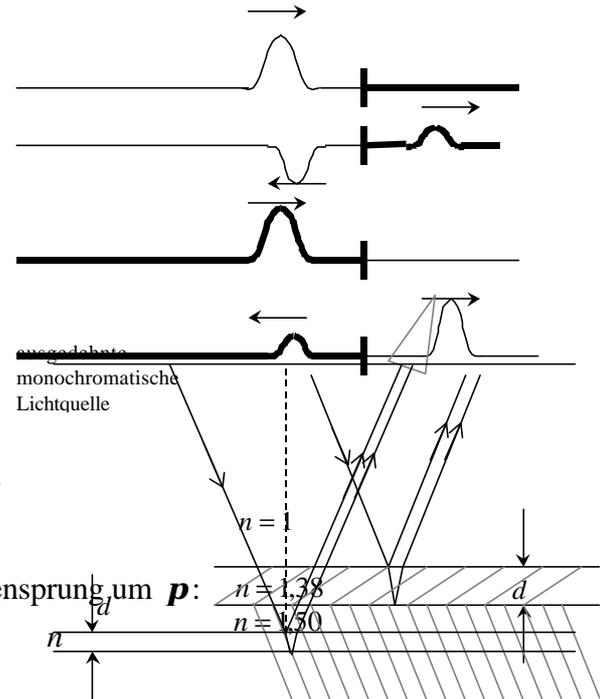
Bsp.: Entspiegelung von Gläsern:

Wie dick muß die  $\text{MgF}_2$ -Schicht sein, um die Reflexion zu minimieren ( $\lambda = 550 \text{ nm}$ )?

Beide Wellen erfahren bei ihrer Reflexion einen Phasensprung um  $\pi$ :

$$\Rightarrow \text{Minimum für } n_{\text{MgF}_2} \cdot 2d = \left(m - \frac{1}{2}\right) \cdot \lambda$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{d = \frac{\lambda}{4n} = 99.6 \text{ nm}}} \quad (m = 1).$$



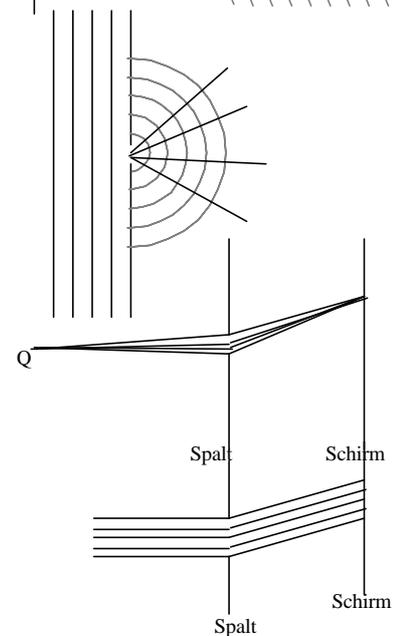
## 7 Beugung

Ablenkung von Wellen um ein Hindernis (Kante).

### 7.1 Einzelspalt

Fresnel-Beugung: Quelle und Schirm stehen in endlichem Abstand zur Blende.

Fraunhofer-Beugung: Quelle und Schirm stehen in  $\rightarrow \infty$  Abstand zum Spalt.<sup>17</sup>



<sup>15</sup>  $\lambda = \lambda_{\text{Vakuum}}$ .

<sup>16</sup> Bei dieser Schichtdicke wird  $\lambda = 275 \text{ nm}$ ,  $\frac{1}{2} \cdot 275 \text{ nm}$ ,  $\frac{1}{3} \cdot 275 \text{ nm}$  ... maximal reflektiert. Wählt man in obiger Bestimmungsformel nicht  $m = 1$ , sondern  $m = 2$ , so wäre  $d = 300 \text{ nm}$ , und es gäbe konstruktive Interferenz für  $\lambda = 825 \text{ nm}, 412.5 \text{ nm}, 275 \text{ nm}, \dots$

<sup>17</sup> S. Interferenz Doppelspalt:  $e > d$ . Praxis: Fraunhofer mit Sammellinsen.

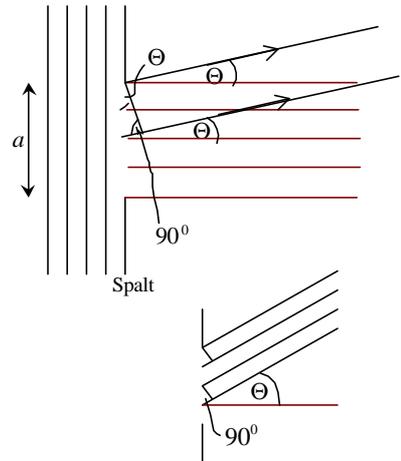
$\Theta = 0$ : Zentrales Maximum .

Für  $\frac{a}{2} \cdot \sin \Theta = \frac{\lambda}{2}$  ergibt sich das erste Minimum:<sup>18</sup>

Jeder Strahl in der oberen Spalthälfte löscht sich mit einem Strahl, dessen Ursprung um  $\frac{a}{2}$  entfernt liegt, aus. Das zweite Minimum ist erreicht, wenn es für den Winkel  $\Theta$  jeweils zwei solcher sich auslöschenden Paare gibt:

$$\frac{a}{4} \cdot \sin \Theta = \frac{\lambda}{2} .$$

⇒ **Beugungs – Minima für**  
 $a \sin \Theta = m \cdot \lambda, \quad m = 1, 2, \dots$ ,  $a =$  Breite des Schlitzes.  
 Dazwischen liegen Maxima.



Bsp.: Welche Breite hat ein Spalt, für den mit rotem Licht ( $\lambda = 650 \text{ nm}$ ) das erste Minimum unter einem Winkel von  $30^\circ$  auftritt?

$$a = \frac{\lambda}{\sin \Theta} = 1300 \text{ nm} = \underline{\underline{1.3 \text{ \mu m}}} .$$

Berechnung der Intensität auf dem Schirm:

Geometrische Addition zweier Wellen im Zeigerdiagramm:

$$E_1 = E_0 \sin(\omega t), \quad E_2 = E_0 \sin(\omega t + \mathbf{j}) .^{19}$$

$$E_1 + E_2 = 2E_0 \cos \frac{\mathbf{j}}{2} \cdot \sin \left( \omega t + \frac{\mathbf{j}}{2} \right) = E_R \cdot \sin \left( \omega t + \frac{\mathbf{j}}{2} \right)$$

Die resultierende Amplitude ist  $E_R$ .

Genauso für mehrere Wellen.

Wir denken uns den Einzelspalt in  $N$  Abschnitte unterteilt, jeweils der Breite  $\Delta x$ .

Die Phasendifferenz  $\mathbf{j}$  zwischen zwei benachbarten Wellen ist gegeben durch

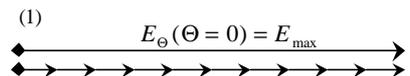
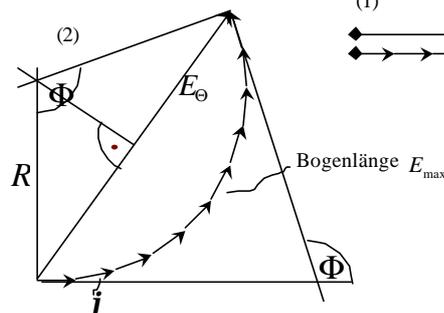
$$\mathbf{j} = \frac{\text{Gangunterschied}}{\lambda} \cdot 2\pi \Rightarrow \mathbf{j} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \Delta x \sin \Theta .$$

Zur Berechnung der resultierenden Amplitude  $E_\Theta$  bei einem Winkel  $\Theta$  sind alle  $N$  Wellen unter Berücksichtigung ihrer Phasenbeziehung aufzuaddieren:

(1)  $\Theta = 0$ :  $\mathbf{j} = 0$ ,

$$E_\Theta = E_{\max}$$

(2) Bogenlänge  $E_{\max}$  .

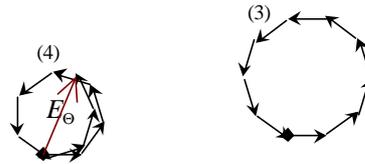


<sup>18</sup> Für  $a \downarrow \lambda \Rightarrow \Theta \uparrow 90^\circ$ .

<sup>19</sup> Die Projektion auf die  $y$ -Achse gibt die zeitlich oszillierende  $E$ -Feldstärke.

(3)  $E_{\Theta} = 0, \mathbf{j} = \frac{360^{\circ}}{N} \Leftrightarrow 1. \text{ Minimum!}^{20}$

(4) 1. Maximum,  $E_{\Theta} < E_{\max} (I \propto E_{\Theta}^2)$ .



Berechnung von  $I_{\Theta} = I(\Theta)$ :

Aus Abbildung (2) folgt:  $E_{\Theta} = 2 \cdot R \sin \frac{\mathbf{f}}{2}$ . Mit  $E_{\max} = R \cdot \mathbf{f}$  folgt<sup>21</sup>

$$E_{\Theta} = \frac{E_{\max}}{\mathbf{f}/2} \cdot \sin \frac{\mathbf{f}}{2} \quad \mathbf{f} = \text{Phasendifferenz zwischen den \u00e4u\u00dferten Spaltstrahlen:}$$

$$\mathbf{f} = \frac{2\mathbf{p}}{\mathbf{l}} \cdot a \sin \Theta$$

$$\Leftrightarrow E_{\Theta} = \frac{E_{\max}}{\mathbf{a}} \sin \mathbf{a}, \quad \text{mit } \mathbf{a} = \frac{\mathbf{f}}{2} = \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{l}} a \sin \Theta.$$

Intensit\u00e4t:  $I_{\Theta} \propto E_{\Theta}^2 \propto \underbrace{E_{\max}^2}_{I_{\max}} \cdot \left(\frac{\sin \mathbf{a}}{\mathbf{a}}\right)^2$

Minima:  $I_{\Theta} = 0 \Rightarrow \mathbf{a} = m \cdot \mathbf{p}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$

oder  $a \sin \Theta = m \cdot \mathbf{l}$ .

Bsp.: Bestimme die Halbwertsbreite  $\Delta\Theta$  des zentralen Maximums bei Fraunhofer-Beugung.

$$I_{\Theta} = \frac{1}{2} I_{\max} = I_{\max} \cdot \left(\frac{\sin \mathbf{a}_x}{\mathbf{a}_x}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\sin \mathbf{a}_x}{\mathbf{a}_x}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

Graphische L\u00f6sung f\u00fcr  $\mathbf{a}_x$ :

Zeichne  $f(\mathbf{a}) = \left(\frac{\sin \mathbf{a}}{\mathbf{a}}\right)^2$  und bestimme  $\mathbf{a}_x$  mit  $f(\mathbf{a}_x) = \frac{1}{2}$ .

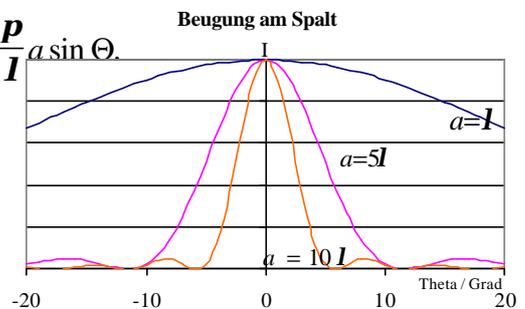
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{\mathbf{a}_x \approx 1.4 \text{ rad} \approx 80^{\circ}}} \text{.}^{22}$$

Bestimme nun  $\Theta_x$ :

$$\mathbf{a}_x = \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{l}} \cdot a \sin \Theta_x \Rightarrow \sin \Theta_x = \frac{\mathbf{l}}{a} \cdot \frac{\mathbf{a}_x}{\mathbf{p}}.$$

$$\text{F\u00fcr } \frac{a}{\mathbf{l}} = 5 \Rightarrow \Theta_x = 5.1^{\circ}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{\text{Halbwertsbreite } \Delta\Theta = 2\Theta_x = 10.2^{\circ}}}.$$



<sup>20</sup>  $\mathbf{j} = \frac{2\mathbf{p}}{a} \cdot \Delta x = \frac{2\mathbf{p}}{\mathbf{l}} \cdot \Delta x \sin \Theta \Rightarrow \mathbf{l} = a \sin \Theta!$

<sup>21</sup>  $N \rightarrow \infty, \Delta x \rightarrow dx$

<sup>22</sup> Der maximal m\u00f6gliche Ablenkwinkel ist  $\Theta = 90^{\circ} \Rightarrow \mathbf{a}_{\max} = \frac{a}{\mathbf{l}} \cdot \mathbf{p}$ .

## 7.2 Doppelspalt

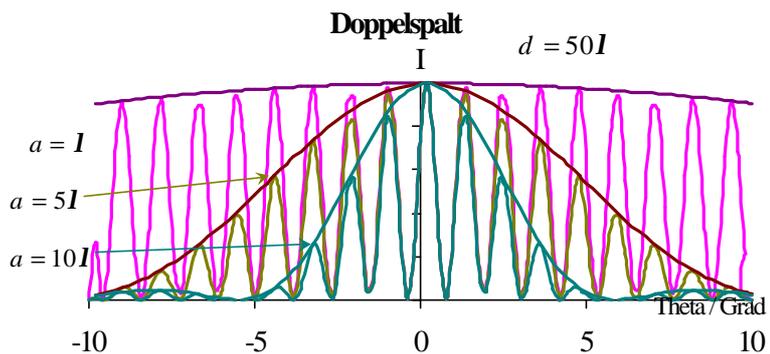
Überlagerung von Interferenz und Beugung.  $d =$  Abstand der Schlitze,  
 $a =$  Schlitzbreite .

$$\text{Intensität: } I_{\Theta, \text{Interferenz}} \propto 4E_0^2 \cos^2\left(\frac{pd}{l} \sin \Theta\right) := I_{\max, \text{Interferenz}} \cdot \cos^2 \mathbf{b}, \quad \mathbf{b} = \frac{pd}{l} \sin \Theta$$

$$I_{\Theta, \text{Beugung}} \propto I_{\max, \text{Beugung}} \cdot \left(\frac{\sin \mathbf{a}}{\mathbf{a}}\right)^2, \quad \mathbf{a} = \frac{pa}{l} \sin \Theta.$$

Kombination:  $I_{\max, \text{Interferenz}}$  ist die durch  $I_{\Theta, \text{Beugung}}$  gegebene variable Amplitude.

$$\Leftrightarrow I_{\Theta} = I_{\max} \cdot \cos^2 \mathbf{b} \cdot \left(\frac{\sin \mathbf{a}}{\mathbf{a}}\right)^2.$$



**Bsp.:** Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, damit im zentralen Beugungsmaximum (der Einhüllenden) genau 11 Interferenzstreifen liegen?

1. Beugungsminimum = 6. Interferenzminimum ( $m = 5$ ):

$$\sin \Theta = \frac{l}{a} = 5\frac{1}{2} \cdot \frac{l}{d} \Rightarrow \underline{\underline{\frac{d}{a} = 55 = \frac{11}{2}}} \quad (\text{unabhängig von } l!)$$

## 7.3 Lochblende

Für eine Lochblende liegt das erste Beugungsminimum bei

$$\sin \Theta = 1.22 \frac{l}{d}, \quad d = \text{Durchmesser der runden Öffnung.}^{23}$$

Auflösungsvermögen: Zwei Punktquellen sind auflösbar, wenn das zentrale Maximum der zweiten Quelle auf das erste Minimum der ersten Quelle (oder weiter weg) fällt:

$$\overline{\Theta_{\min}} = \arcsin\left(1.22 \frac{l}{d}\right) \approx \overline{1.22 \frac{l}{d}} \quad \Leftrightarrow d \text{ groß, } l \text{ klein.}^{24}$$

<sup>23</sup> Beim Einzelspalt ist die Länge des Schlitzes  $l > a$ .  $d$  könnte z.B. der Durchmesser einer Teleskop-Linse (- Spiegel) sein. Weitere Minima liegen bei  $\sin \Theta = 2.23 \frac{l}{d}, 3.24 \frac{l}{d}, 4.24 \frac{l}{d}, \dots$

<sup>24</sup> Ist der Winkel  $\Theta > \Theta_{\min}$ , dann sind die beiden Objekte getrennt sichtbar.