Ingenieur-Mathematik I

Prof. W. Tischhauser

2003

Inhaltsverzeichnis

1 Mathematische Strukturen 3
2 Vektorraum 3
3 Matrizen 3
4 Determinanten 3
5 Lineare Gleichungssysteme 3
6 Komplexe Zahlen 3
7 Differentialrechnung für Funktionen mit einer Veränderlichen 4
7.1 Stetige Funktionen und differenzierbare Funktionen 4
7.2 Differentiation elementarer Funktionen 5
7.3 Differentiationsregeln 6
7.3.1 Konstantenregel 6
7.3.2 Faktorregel 6
7.3.3 Summenregel 6
7.3.4 Produktregel 6
7.3.5 Quotientenregel 7
7.3.6 Kettenregel 7
7.3.7 Implizite Differentiation 7
7.4 Ableitungen höherer Ordnung 7
7.5 Mittelwertsatz 8
7.6 Regel von Bernoulli und de l'Hospital 8
7.7 Tangenten- und Normalengleichung 9
7.8 Linearisierung von Funktionen 9
7.9 Kurvenuntersuchungen 10
8 Integralrechnung für Funktionen mit einer Veränderlichen 11
8.1 Das unbestimmte Integral 11
8.2 Das bestimmte Integral 12
8.3 Die Grundintegrale 12
8.4 Integrationsregeln 12
8.4.1 Faktorregel 12
8.4.2 Summenregel 13
8.4.3 Regeln über Integrationsgrenzen 13
8.5 Integrationsmethoden 13
8.5.1 Integration durch Substitution 13
8.5.2 Partielle Integration 14
8.5.3 Integration rationaler Funktionen 15
8.6 Uneigentliche Integrale 17
8.6.1 Integrale mit unbeschränktem Integrationsintervall 17
8.6.2 Integrand mit einer Unstetigkeitsstelle 18
8.7 Numerische Integration 19
8.7.1 Sehnentrapezformel 20
8.7.2 Simpsonsche Formel 20
9 Unendliche Reihen 21
9.1 Definition 21

9.2 Konvergenzkriterien 22
9.2.1 Majorantenkriterium 22
9.2.2 Quotientenkriterium 23
9.2.3 Wurzelkriterium 23
9.2.4 Cauchysches Integralkriterium 23
9.2.5 Leibnizsches Konvergenzkriterium für alternierende Reihen . . 24
9.3 Potenzreihen 24
9.3.1 Definition 24
9.3.2 Konvergenz einer Potenzreihe 25
9.3.3 Eigenschaften von Potenzreihen 25
9.4 Entwicklung von Funktionen in Potenzreihen, Taylorsche Formel, Taylor-Reihe, MacLaurin-Reihe 26
9.5 Fourier-Reihen 27

1 Mathematische Strukturen

2 Vektorraum

3 Matrizen

4 Determinanten

5 Lineare Gleichungssysteme

6 Komplexe Zahlen

7 Differentialrechnung für Funktionen mit einer Veränderlichen

7.1 Stetige Funktionen und differenzierbare Funktionen

Allgemein versteht man unter einer *Funktion* eine Abbildung f von einer Menge D (Definitionsbereich von f) in eine Menge W (Wertebereich von f)

$$f : D \longrightarrow W$$

und zwar so, dass jedem Element $x \in D$ genau ein Element y aus W zugeordnet wird, d. h. es gilt

$$y = f(x)$$

Dabei heißt x die unabhängige Variable (Argument), y die abhängige Variable (Funktionswert).

Für $D \subseteq \mathbb{R}$ und $W \subseteq \mathbb{R}$ liegt eine *reelle* Funktion vor, für $D \subseteq \mathbb{C}$ und $W \subseteq \mathbb{C}$ liegt eine *komplexe* Funktion vor.

Definition 7.1: Sei f eine Funktion mit einer Veränderlichen und dem Definitionsbereich D und x_0 ein innerer Punkt aus D. Dann heißt f *stetig in* x_0, wenn

$$f(x) \to f(x_0) \quad \text{für } x \to x_0 \quad \text{gilt, d. h. wenn } \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \quad \text{ist.}$$

Formalisierte Schreibweise:

$$f \text{ ist in } x_0 \text{ stetig} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall_{\epsilon \in \mathbb{R}^+} \exists_{\delta \in \mathbb{R}^+} \forall_{x \in D} \, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

Ist D' eine Teilmenge von D, so heißt f stetig in D', wenn f in jedem Punkt $x \in D'$ stetig ist.

■

Definition 7.2: Sei f eine Funktion mit einer Veränderlichen und dem Definitionsbereich D und x_0 ein innerer Punkt aus D. Dann heißt f *differenzierbar* in x_0, wenn der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (h \in \mathbb{R})$$

(eindeutig) existiert.

Dieser Grenzwert wird als *Ableitung* oder *Differentialquotient* der Funktion f im Punkt x_0 bezeichnet.

Schreibweise:

$$f'(x_0) \quad \text{oder} \quad \frac{d}{dx} f(x_0)$$

■

Bemerkung 7.3 .

Einen Zusammenhang zwischen stetigen Funktionen und differenzierbaren Funktionen gibt folgender Satz.

Satz 7.4: Die Funktion f sei in einem inneren Punkt x_0 ihres Definitionsbereiches differenzierbar. Dann ist f in x_0 stetig.

$$f \text{ in } x_0 \text{ differenzierbar} \Longrightarrow f \text{ in } x_0 \text{ stetig}$$

D. h. die Stetigkeit ist eine notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung für die Differenzierbarkeit.

■

Aus dem Satz 7.4 folgt sofort:

$$f \text{ in } x_0 \text{ nicht stetig} \Longrightarrow f \text{ in } x_0 \text{ nicht differenzierbar}$$

Eine stetige Funktion muss nicht differenzierbar sein, wie folgendes Beispiel zeigt.

Beispiel 7.5

7.2 Differentiation elementarer Funktionen

Die Ableitungen der wichtigsten elementaren Funktionen kann aus entsprechenden Tabellen entnommen werden. Sie ergeben sich direkt aus der Definition der Differenzierbarkeit durch Bestimmung des Grenzwertes.

Es gilt z. B.

- für die Potenzfunktion $f(x) = x^n \quad, n \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$$

Bei der Ableitung einer Potenzfunktion wird der Exponent als Faktor gesetzt und der neue Exponent um 1 erniedrigt.

- für trigonometrische Funktionen:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x \\ f(x) &= \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x \\ f(x) &= \tan x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \\ f(x) &= \cot x \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x} \end{aligned}$$

- für die Exponentialfunktion:

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$$

Sie bleibt unverändert.

Es folgt eine Zusammenstellung der wichtigsten Differentiationsregeln.

7.3 Differentiationsregeln

Für die folgenden Regeln wird vorausgesetzt, dass die betrachteten Funktionen differenzierbar sind.

7.3.1 Konstantenregel

Sei $f(x) = C$ (C Konstante). Dann ist

$$f'(x) = 0$$

Die Ableitung einer Konstante ist gleich null.

Beispiel 7.6

7.3.2 Faktorregel

Sei $f(x) = C \cdot g(x)$ (C Konstante). Dann ist

$$f'(x) = C \cdot g'(x)$$

Ein konstanter Faktor bleibt beim Differenzieren erhalten.

Beispiel 7.7

7.3.3 Summenregel

Sei $f(x) = g_1(x) + g_2(x) + \ldots + g_n(x)$. Dann ist

$$f'(x) = g_1'(x) + g_2'(x) + \ldots + g_n'(x)$$

Bei einer endlichen Summe wird gliedweise differenziert.

Beispiel 7.8

7.3.4 Produktregel

Sei $f(x) = g_1(x) \cdot g_2(x)$. Dann ist

$$f'(x) = g_1'(x) \cdot g_2(x) + g_1(x) \cdot g_2'(x)$$

Für 3 Faktoren gilt entsprechend:
Sei $f(x) = g_1(x) \cdot g_2(x) \cdot g_3(x)$. Dann ist

$$f'(x) = g_1'(x) \cdot g_2(x) \cdot g_3(x) + g_1(x) \cdot g_2'(x) \cdot g_3(x) + g_1(x) \cdot g_2(x) \cdot g_3'(x)$$

usw.

Beispiel 7.9

7.3.5 Quotientenregel

Sei $f(x) = \frac{g_1(x)}{g_2(x)}$. Dann ist

$$f'(x) = \frac{g_1'(x) \cdot g_2(x) - g_1(x) \cdot g_2'(x)}{g_2^2(x)}$$

Beispiel 7.10

7.3.6 Kettenregel

Sei $f(x)$ eine zusammengesetzte (mittelbare) Funktion der Form $f(x) = g_1[g_2(x)]$. Dann ist

$$f'(x) = g_1'[g_2(x)] \cdot g_2'(x)$$

Die Ableitung einer zusammengesetzten Funktion ist gleich der Ableitung der äußeren Funktion g_1 multipliziert mit der Ableitung der inneren Funktion g_2.

Beispiele 7.11

7.3.7 Implizite Differentiation

Bisher lag die Funktion $f(x)$ in expliziter Form vor. Es gibt jedoch Fälle, in denen x und $f(x)$ *implizit* in folgender Form miteinander verknüpft sind:

$$F(x, f(x)) = 0$$

Ist die Auflösung nach $f(x)$ nicht oder nur sehr schwer möglich und möchte man trotzdem die Ableitung $f'(x)$ bilden, so ist folgendes Verfahren möglich.

Implizite Differentiation:

1. Schritt: $F(x, y) = 0$ wird (gliedweise) nach x differenziert. Dabei ist jeder Term, der $f(x)$ enthält, nach der Kettenregel zu differenzieren.
2. Schritt: Die differenzierte Gleichung $F'(x, y)$ wird anschließend nach $f'(x)$ aufgelöst.

Beispiel 7.12

7.4 Ableitungen höherer Ordnung

Eine schon einmal differenzierte Funktion kann natürlich nochmals differenziert werden, falls die Voraussetzung der Differenzierbarkeit vorliegt.

Definition 7.13: Als Ableitung n-ter Ordnung bzw. Differentialquotient n-ter Ordnung einer Funktion f bezeichnet man die durch n-maliges Ableiten von f entstehende Funktion

$$f^{(n)}(x) = f^{(n-1)'}(x)$$

bzw.

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} f(x)\right)$$

■

Man erhält also die höheren Ableitungen durch folgendes Vorgehen:

Gegebene Funktion $f(x)$

1. Ableitung der gegebenen Funktion: $f'(x) = \frac{d}{dx} f(x)$

2. Ableitung der gegebenen Funktion: $f''(x) = \frac{d}{dx} f'(x)$

....

n-te Ableitung der gegebenen Funktion: $f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx} f^{(n-1)}(x)$

Beispiel 7.14

7.5 Mittelwertsatz

Satz 7.15 (Mittelwertsatz): Die reellwertige Funktion f sei in $[a,b]$ stetig und in $]a,b[$ differenzierbar (mit $a < b$). Dann gibt es mindestens ein $x_0 \in\,]a,b[$ mit

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

■

Skizze 7.16

Beispiel 7.17

7.6 Regel von Bernoulli und de l'Hospital

Regel 7.18: Es seien $f_1(x)$ und $f_2(x)$ zwei differenzierbare Funktionen, für die gilt:

$$f_1(x) \to 0 \text{ und } f_2(x) \to 0 \quad \text{für } x \to x_0 \qquad (\text{für } x_0 \text{ ist } \pm\infty \text{ zugelassen})$$

Ferner sei $f(x) = \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$.

$f(x)$ besitzt dann an der Stelle x_0 keinen Funktionswert (es entsteht der unbestimmte Ausdruck „$\frac{0}{0}$").

Existiert der Grenzwert der n-ten Ableitungen von $f_1(x)$ und $f_2(x)$, also existiert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1^{(n)}(x)}{f_2^{(n)}(x)}$$

so kann dieser als Grenzwert für die ursprüngliche Funktion $f(x)$ genommen werden:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1^{(n)}(x)}{f_2^{(n)}(x)} \qquad \text{mit minimalem } n \in \mathbb{N}$$

■

$f_1(x)$ und $f_2(x)$ werden solange „getrennt" (nicht nach der Quotientenregel !) abgeleitet, bis ein Grenzwert gefunden wird.

Bemerkung 7.19: Weitere unbestimmte Ausdrücke sind: „$\frac{\infty}{\infty}$" , „$0 \cdot \infty$" und „1^∞".

Beispiel 7.20

7.7 Tangenten- und Normalengleichung

Sei $P_0(x_0; y_0)$ ein Punkt auf der Kurve mit der Funktionsgleichung $y = f(x)$. Dann besitzt die *Tangente* im Punkt P_0 die Gleichung

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = f'(x_0) \qquad \text{(Tangentengleichung).}$$

Die *Normale* im Punkt P_0 besitzt die Gleichung

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = -\frac{1}{f'(x_0)} \qquad \text{(Normalengleichung).}$$

Skizze 7.21

Bemerkung 7.22

Beispiel 7.23

7.8 Linearisierung von Funktionen

Ersetzt man eine Funktion in einer kleinen Umgebung eines Punktes $P_0(x_0; y_0)$ („Arbeitspunkt") durch die Tangente in P_0 , so spricht man von der *Linearisierung dieser Funktion* (die Tangente ist ja eine lineare Funktion (eine Gerade)). Aus der Tangentengleichung erhält man folgende *Linearisierungsformel*

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \qquad \text{für kleine } |x - x_0| .$$

Bemerkung 7.24

Beispiel 7.25

7.9 Kurvenuntersuchungen

Bei Kurvendiskussionen werden Funktionen, bei denen man sich einen Überblick über den Kurvenverlauf verschaffen will (qualitative Skizze), nach folgenden Gesichtspunkten untersucht:

- Definitionsbereich (bzw. Definitionslücken)
- Symmetrie
- Nullstellen
- Pole (vertikale Asymptoten)
- Relative Extremwerte
- Wendepunkte
- Verhalten der Funktion für $x \to \pm\infty$
- Wertebereich

An dieser Stelle soll kurz auf die beiden Punkte „relative Extremwerte“ und „Wendepunkte“ eingegangen werden.

Für die *relativen Extremwerte* gilt folgender Satz.

Satz 7.26:

1. *Notwendig* für einen *Extremwert* x_E ist das Vorhandensein einer waagerechten Tangente an der Stelle x_E , d. h. es muss gelten
$$f'(x_E) = 0$$
2. *Hinreichend* für einen *Extremwert* x_E ist, dass die erste nichtverschwindende höhere Ableitung an der Stelle x_E von *gerader* Ordnung ist:
$$f^{(n)}(x_E) \neq 0 \qquad n \text{ gerade}$$

Für $f^{(n)}(x_E) > 0$ liegt ein relatives Minimum, für $f^{(n)}(x_E) < 0$ liegt ein relatives Maximum vor.

■

Bemerkung 7.27

Über die Existenz von *Wendepunkten* gibt der nächste Satz Auskunft.

Skizze 7.28

Satz 7.29:

1. *Notwendig* für einen *Wendepunkt* x_W ist das Verschwinden der zweiten Ableitung an der Stelle x_W , d. h. es muss gelten
$$f''(x_W) = 0$$

2. *Hinreichend* für einen *Wendepunkt* x_W ist, dass die erste nichtverschwindende höhere Ableitung an der Stelle x_W von *ungerader* Ordnung ist:
$$f^{(n)}(x_W) \neq 0 \qquad n \text{ ungerade}$$

■

Bemerkung 7.30

8 Integralrechnung für Funktionen mit einer Veränderlichen

Die Hauptaufgabe der Differentialrechnung bestand darin, zu einer gegebenen differenzierbaren Funktion $f(x)$ die Ableitung $f'(x)$ zu ermitteln. Die Hauptaufgabe der Integralrechnung ist die Umkehrung: Zu einer gegebenen stetigen Ableitungsfunktion $f(x) = F'(x)$ soll die ursprüngliche Stammfunktion $F(x)$ ermittelt werden.

8.1 Das unbestimmte Integral

Definition 8.1: Jede differenzierbare Funktion $F(x)$, für die gilt
$$F'(x) = f(x)$$
heißt *Stammfunktion* (Integralfunktion) von $f(x)$. Dabei ist $f(x)$ eine gegebene stetige Funktion.

Schreibweise:
$$F(x) = \int f(x)\,dx$$

■

Es gilt nun:

Zu jeder stetigen Funktion $f(x)$ existieren unendlich viele Stammfunktionen. Sie unterscheiden sich aber nur durch eine additive Konstante.

Definition 8.2: Die Menge aller Stammfunktionen von $f(x)$:
$$\{F(x) + C \mid C \in \mathbb{R}\} \qquad C\text{: Integrationskonstante}$$
heißt das *unbestimmte Integral* von $f(x)$.

■

Unter *Integration* einer gegebenen Funktion $f(x)$ versteht man deshalb das Ermitteln *aller* Stammfunktionen $F(x)$ von $f(x)$.

Beispiele 8.3

8.2 Das bestimmte Integral

Definition 8.4: Unter einem *bestimmten Integral* einer Funktion $f(x)$ versteht man den folgenden (eindeutigen) Ausdruck

$$\int_a^b f(x)\, dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

Dabei heißt a die untere und b die obere Integrationsgrenze.

■

Eine geometrische Deutung des bestimmten Integrals gibt der folgende Satz.

Satz 8.5 (Hauptsatz der Integralrechnung): Sei $f(x)$ eine in $[a, b]$ stetige Funktion. Dann ist $f(x)$ (Riemann-) integrierbar. Gilt noch $f(x) \geq 0$ in $[a, b]$, so bestimmt das bestimmte Integral

$$I = \int_a^b f(x)\, dx$$

den Flächeninhalt zwischen der Bildkurve von $f(x)$ und der $x-$Achse in $[a, b]$.

Skizze 8.6

■

8.3 Die Grundintegrale

Die Grundintegrale könne aus einer Tabelle für die Differentiation elementarer Funktionen (Kap. 7.2) entnommen werden.

Beispiele 8.7

8.4 Integrationsregeln

8.4.1 Faktorregel

Es gilt:

$$\int c \cdot f(x)\, dx = c \cdot \int f(x)\, dx \qquad c \in \mathbb{R}$$

bzw.

$$\int_a^b c \cdot f(x)\, dx = c \cdot \int_a^b f(x)\, dx \qquad c \in \mathbb{R}$$

Ein konstanter Faktor darf vor (oder hinter) das Integral gesetzt werden.

Beispiel 8.8

8.4.2 Summenregel

Es gilt:

$$\int [f(x) + g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$$

bzw.

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$$

Eine endliche Summe von Funktionen kann gliedweise integriert werden.

Beispiel 8.9

8.4.3 Regeln über Integrationsgrenzen

Es gelten die folgende drei Regeln.

1. Vertauscht man die Integrationsgrenzen, so ändert der Integralwert sein Vorzeichen.
$$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$$
2. Fallen die beiden Integrationsgrenzen zusammen, so ist der Integralwert gleich null.
$$\int_a^a f(x)\, dx = 0$$
3. Man darf das Integrationsintervall in mehrere (hier zwei) Teilintervalle aufteilen und über die einzelnen Teilintervalle integrieren, ohne dass sich der Integralwert ändert.
$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$$

   Skizze 8.10.

8.5 Integrationsmethoden

Die in diesem Kapitel angesprochenen Methoden haben das Ziel, gegebene komplizierte Integrale auf einfachere Integrale, möglichst Grundintegrale zurückzuführen und so zu lösen.

8.5.1 Integration durch Substitution

Verfahren 8.11 (Substitution):

1. Das gegebene Integral $\int f(x)\, dx$ wird mit Hilfe einer Substitutionsgleichung
$$x = \varphi(t) \qquad [\Rightarrow dx = \varphi'(t)dt]$$

in ein neues Integral übergeführt:

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)dt = \int g(t)\,dt \qquad \text{mit } g(t) = f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)$$

(d. h. die alte Integrationsvariable x wird durch eine neue Integrationsvariable t ersetzt)

2. Das neue Integral wird gelöst, so dass

$$\int g(t)\,dt = G(t) + C \qquad C\text{: Integrationskonstante}$$

gilt.

3. Durch Resubstitution geht man wieder zur alten Variablen x zurück:

$$\text{Aus } x = \varphi(t) \text{ folgt } t = \psi(x)$$

und damit

$$\int f(x)\,dx = \int g(t)\,dt = G[\psi(x)] + C \qquad C\text{: Integrationskonstante}$$

■

Bei bestimmten Integralen kann man auf den 3. Schritt der Resubstitution verzichten, wenn man die Integrationsgrenzen mitsubstituiert.

Es gilt folgender Satz.

Satz 8.10: Wird bei einem bestimmten Integral die Veränderliche x mit Hilfe der Substitution

$$x = \varphi(t) \Leftrightarrow t = \psi(x)$$

auf die neue Veränderliche t transformiert, so gilt

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = \int_{t=\psi(a)}^{t=\psi(b)} f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)dt$$

■

Es sollen nun einige Standardsubstitutionen behandelt werden.

Standardsubstitutionen 8.11

8.5.2 Partielle Integration

Diese Integrationsregel kann unmittelbar aus der Produktregel der Differentialrechnung (Kap. 7.3.4) gefolgert werden.

Herleitung 8.12

Satz 8.13 (Partielle Integration) Die Funktionen u und v seien stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int u(x) \cdot v'(x)\, dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\, dx$$

Für das bestimmte Integral gilt dann sinngemäß

$$\int_a^b u(x) \cdot v'(x)\, dx = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x)\, dx$$

Dabei müssen u und v in dem beschränkten, abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetig differenzierbar sein.

■

Bemerkung 8.14: Bei der Berechnung des Integrals $\int f(x)\, dx$ muss bei Anwendung dieser Methode $f(x)$ in 2 Faktorfunktionen $u(x)$ und $v'(x)$ zerlegt werden (und zwar in geeigneter Weise). Die Integration gelingt, wenn

1. die Stammfunktion $v(x)$ von $v'(x)$ bestimmt werden kann und
2. das Integral $\int u'(x) \cdot v(x)\, dx$ lösbar ist.

Weitere Namen dieser Methode sind: Produktintegration, Teilintegration.

Beispiele 8.15

Bemerkung 8.16:

1. Die partielle Integration wird oft mehrmals hintereinander ausgeführt.
2. Die partielle Integration wird oft bei folgenden Integraltypen angewendet:

$$\begin{array}{ll} \int x^n \log x dx & n \in \mathbb{N} \\ \int x^n e^{ax} dx & n \in \mathbb{N} \\ \int x^n \sin ax dx & n \in \mathbb{N} \\ \int x^n \cos ax dx & n \in \mathbb{N} \end{array}$$

Ziel ist es, n durch aufeinanderfolgende Umformungen bis auf null zu erniedrigen.

8.5.3 Integration rationaler Funktionen

Dies ist keine Integrationsmethode im eigentlichen Sinne, sondern es wird vor der Integration die zu integrierende Funktion (Integrand) in Partialbrüche zerlegt. Anschließend werden diese Partialbrüche einzeln integriert (dies ist erlaubt wegen der Summenregel (Kap. 8.4.2)).

Sei

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \qquad P(x), Q(x): \text{ Polynome mit Grad } P(x) < \text{Grad } Q(x)$$

(d. h. $f(x)$ ist eine *echt* gebrochene rationale Funktion).

Für $\frac{P(x)}{Q(x)}$ mit Grad $P(x) \geq$Grad $Q(x)$ muss mittels Polynomdivision der Integrand vorher in die Form

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \qquad S(x): \text{ Polynom}$$

gebracht werden.

Für die *Partialbruchzerlegung* werden folgende Ansätze gemacht. Vorausgesetzt wird hier, dass das Nennerpolynom in normierter Form vorliegt, d. h. dass der Koeffizient der höchsten x-Potenz gleich 1 ist.

1. Fall: $Q(x)$ besitzt nur einfache reelle Nullstellen

   Also: $Q(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_m)$.

   Dann ist folgender Ansatz zu wählen:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x - x_1)} + \frac{A_2}{(x - x_2)} + \ldots + \frac{A_m}{(x - x_m)}$$

2. Fall: $Q(x)$ besitzt nur reelle Nullstellen, die jedoch auch mehrfach auftreten können

   Also: $Q(x) = (x - x_1)^{n_1} (x - x_2)^{n_2} \cdot \ldots \cdot (x - x_m)^{n_m}$.

   Dann ist folgender Ansatz zu wählen:

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} \quad = \quad & \frac{A_{11}}{(x - x_1)} + \frac{A_{12}}{(x - x_1)^2} + \ldots + \frac{A_{1n_1}}{(x - x_1)^{n_1}} \\ & + \frac{A_{21}}{(x - x_2)} + \frac{A_{22}}{(x - x_2)^2} + \ldots + \frac{A_{2n_2}}{(x - x_2)^{n_2}} \\ & \ldots \\ & + \frac{A_{m1}}{(x - x_m)} + \frac{A_{m2}}{(x - x_m)^2} + \ldots + \frac{A_{mn_m}}{(x - x_m)^{n_m}}\end{aligned}$$

3. Fall: $Q(x)$ besitzt nur einfache komplexe Nullstellen

   In diesem Fall können zwei konjugiert komplexe Nullstellen x_1 und $\overline{x_1}$ wie folgt zusammengefasst werden:

   Seien $x_1 = \alpha_1 + j\beta_1$ und $\overline{x_1} = \alpha_1 - j\beta_1$ mit $\alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}$ zwei konjugiert komplexe Nullstellen. Dann ist

$$(x - x_1)(x - \overline{x_1}) = (x - \alpha_1 - j\beta_1)(x - \alpha_1 + j\beta_1) = (x - \alpha_1)^2 + \beta_1^2$$

Also: $Q(x) = \left[(x-\alpha_1)^2 + \beta_1^2\right]\left[(x-\alpha_2)^2 + \beta_2^2\right] \cdot \ldots \cdot \left[(x-\alpha_m)^2 + \beta_m^2\right]$

Dann ist folgender Ansatz zu wählen:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1 x + B_1}{(x-\alpha_1)^2 + \beta_1^2} + \frac{A_2 x + B_2}{(x-\alpha_2)^2 + \beta_2^2} + \ldots + \frac{A_m x + B_m}{(x-\alpha_m)^2 + \beta_m^2}$$

4. Fall: $Q(x)$ besitzt mehrfache komplexe Nullstellen

Für die folgende Darstellung sei vorausgesetzt, dass $Q(x)$ nur die konjugiert komplexen Nullstellen $x_1 = \alpha_1 + j\beta_1$ und $\overline{x_1} = \alpha_1 - j\beta_1$ mit $\alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}$ n-fach hat (und sonst keine weiteren Nullstellen, um nicht zu unübersichtlich zu werden)).

Also: $Q(x) = \left[(x-\alpha_1)^2 + \beta_1^2\right]^n$

Dann ist folgender Ansatz zu wählen:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1 x + B_1}{(x-\alpha_1)^2 + \beta_1^2} + \frac{A_2 x + B_2}{\left[(x-\alpha_1)^2 + \beta_1^2\right]^2} + \ldots + \frac{A_n x + B_n}{\left[(x-\alpha_1)^2 + \beta_1^2\right]^n}$$

Bemerkung 8.17: Für die Bestimmung der Konstanten A_i, B_i gibt es zwei Möglichkeiten:

1. Durch Einsetzen bestimmter x-Werte (z. B. Nennernullstellen) erhält man ein einfaches lineares Gleichungssystem für die unbekannten Konstanten A_i, B_i .
2. Koeffizientenvergleich führt ebenfalls zu einem linearen Gleichungssystem.

Bemerkung 8.18: Eine Partialbruchzerlegung kann immer durch einfaches Ausmultiplizieren überprüft werden.

Beispiel 8.19

8.6 Uneigentliche Integrale

Für die Existenz des bestimmten Integrals hatten wir bis jetzt 2 Voraussetzungen:

1. Das Integrationsintervall $[a, b]$ ist beschränkt, d. h. $a, b \in \mathbb{R}$.
2. Der Integrand f ist in $[a, b]$ stetig.

Wird eine oder beide dieser Voraussetzungen verletzt, so kann das Integral trotzdem existieren. Man spricht dann vom *uneigentlichen Integral.* Es muss hier jedoch jeder einzelne Fall geprüft werden.

8.6.1 Integrale mit unbeschränktem Integrationsintervall

Folgende 3 Fälle sind möglich.

Definition 8.20:

1. Sei f in $[a, \infty[= \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x \geq a\}$ stetig. Dann heißt das Integral

$$\int_a^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\, dx$$

uneigentlich an der *oberen* Grenze.

2. Sei f in $]-\infty, b] = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x \leq b\}$ stetig. Dann heißt das Integral

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\, dx$$

uneigentlich an der *unteren* Grenze.

3. Sei f in $]-\infty, \infty[= \mathbb{R}$ stetig und sei $c \in \mathbb{R}$. Dann heißt das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^c f(x)\, dx + \lim_{b \to \infty} \int_c^b f(x)\, dx$$

uneigentlich an der *unteren* und *oberen* Grenze.

■

Skizze 8.21

Bemerkung 8.22: Existiert der jeweilige Grenzwert, so spricht man auch von der *Konvergenz* des uneigentlichen Integrals, anderenfalls von der *Divergenz.*

Beispiele 8.23

8.6.2 Integrand mit einer Unstetigkeitsstelle

Sei $f(x)$ an der Stelle $c \in [a, b]$ unstetig, sonst stetig (d. h. $f(x)$ ist stetig für alle $x \in [a, b], x \neq c$). Es sind dann wiederum 3 Fälle möglich.

Definition 8.24: Sei $c \in [a, b]$ eine Unstetigkeitsstelle. Dann heißen die folgenden Integrale *uneigentlich.*

1. $c = a$ $\quad (f(x)$ ist in a nicht stetig)

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int_{a+\varepsilon_1}^{b} f(x)\, dx \qquad \varepsilon_1 \in \mathbb{R}^+$$

2. $c = b$ $\quad (f(x)$ ist in b nicht stetig)

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \int_a^{b-\varepsilon_2} f(x)\, dx \qquad \varepsilon_2 \in \mathbb{R}^+$$

3. $a < c < b$ ($f(x)$ ist in $c \in (a,b)$ nicht stetig)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)\,dx \qquad \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}^+$$

■

Skizze 8.25

Bemerkung 8.26: Weitere Fälle, wie

- $f(x)$ in a und b unstetig
- $f(x)$ besitzt mehrere Unstetigkeitsstellen in (a,b)

lassen sich ohne Schwierigkeiten auf die obigen 3 Fälle zuückführen.

Beispiel 8.27

8.7 Numerische Integration

Da es oft nicht möglich ist, die Integration einer gegebenen Funktion $f(x)$ in geschlossener Form durchzuführen, helfen oft Näherungsverfahren weiter. Dies sind Verfahren zur Bestimmung von

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

Dabei kann das Integrationsintervall endlich oder unendlich, der Integrand $f(x)$ stetig oder unstetig sein.

Die numerischen Integrationsverfahren eignen sich auch für die Fälle, in denen $f(x)$ nur mit diskreten Werten vorliegt (z. B. bei einer Messreihe).

Grundlegende Idee: $f(x)$ wird durch eine Funktion $g(x)$ approximiert, deren Stammfunktion leicht bestimmt werden kann ($g(x)$ sind oft Interpolationspolymone). Als Näherungswert für I wird dann

$$\int_a^b g(x)\,dx$$

genommen.

Für den Fehler, der dabei gemacht wird, gilt allgemein:

Es sei $|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon$ für alle $x \in [a,b]$. Dann gilt

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx \right| = \left| \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx \leq \varepsilon\,(b-a)$$

Prinzipielles Vorgehen: Das Intervall $[a, b]$ wird in Teilintervalle zerlegt. Die Randpunkte dieser Teilintervalle dienen als Stützstellen für die Näherungsfunktion $g(x)$ (meist Interpolationspolynome $P(x)$). Die Stützstellen können außerhalb oder innerhalb von $[a, b]$ liegen.

Skizze 8.28

Am gebräuchlichsten sind äquidistante Stützstellen in $[a, b]$.

Aus der Vielzahl numerischer Integrationsmethoden sollen hier zwei ausgewählt werden:

- Sehnentrapezformel (Trapezformel)
- Simpsonformel

8.7.1 Sehnentrapezformel

Hier wird das Intervall $[a, b]$ in n Teilintervalle gleicher Länge h zerlegt und der Kurvenbogen in jedem Teilintervall durch die Sehne ersetzt.

Skizze 8.29

Sehnentrapezformel 8.30:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\left[\frac{1}{2}f(a) + \sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih) + \frac{1}{2}f(b)\right] \qquad \text{mit } h = \frac{b-a}{n}$$

Genauer gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underbrace{h\left[\frac{1}{2}f(a) + \sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih) + \frac{1}{2}f(b)\right]}_{T(n)} \underbrace{-\frac{h^2}{12}(b-a)\,f''(\zeta)}_{\text{Fehler}} \qquad \text{mit } a < \zeta < b$$

Folgerung 8.31: Die Sehnentrapezregel stellt ein Verfahren 2. Ordnung dar:

$$\int_a^b f(x)\,dx = T(n) + O\left(h^2\right)$$

Für $n \to \infty$ (bzw. $h \to 0$) konvergiert $T(n)$ gegen I.

8.7.2 Simpsonsche Formel

Die Näherung der Kurvenstücke durch einzelne Sehnen in der Sehnentrapezformel ist recht grob. Die Näherung wird feiner, wenn man statt Sehnen Parabeln in der folgenden Art und Weise benutzt.

Skizze 8.32

Simpsonsche Formel 8.33: Sei n eine gerade natürliche Zahl, $h = \dfrac{b-a}{n}$ und $x_i = a + ih \qquad (i = 0, ..., n)$. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left[f(a) + 4\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} f(a + (2i-1)h) + 2\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} f(a + 2ih) + f(b)\right]$$

Genauer gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underbrace{\frac{h}{3}\left[f(a) + 4\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} f(a + (2i-1)h) + 2\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} f(a + 2ih) + f(b)\right]}_{S(n)}$$

$$\underbrace{-\frac{h^4}{180}(b-a)\,f^{(4)}(\zeta)}_{\text{Fehler}} \qquad \text{mit } a < \zeta < b$$

Folgerung 8.35: Die Simpsonsche Formel stellt ein Verfahren 4. Ordnung dar:

$$\int_a^b f(x)\,dx = S(n) + O\left(h^4\right)$$

Für $n \to \infty$ (bzw. $h \to 0$) konvergiert $S(n)$ gegen I.

Beispiel 8.36

9 Unendliche Reihen

9.1 Definition

Definition 9.1: Sei $\{a_n\} = a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ eine unendliche Zahlenfolge ($a_i \in \mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$). Dann versteht man unter einer *unendlichen Reihe* folgenden Ausdruck:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$$

Die endlichen Summen

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\cdots \\ s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n \end{aligned}$$

heißen Partialsummen (Teilsummen) der Reihe. Besitzt die Folge der Partialsummen $\{s_n\} = s_1, s_2, s_3, ..., s_n$ einen Grenzwert S, so heißt die Reihe *konvergent* und S die *Summe der Reihe*:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Existiert der Grenzwert nicht, so heißt die Reihe *divergent.*

■

Bemerkung 9.2: Eine unendliche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt *absolut konvergent*, wenn

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \quad \text{konvergiert.}$$

Eine absolut konvergente Reihe ist stets konvergent. Die Umkehrung gilt nicht.

9.2 Konvergenzkriterien

Für die Konvergenz einer unendlichen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ eine notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung. Im folgenden werden hinreichende Bedingungen behandelt.

9.2.1 Majorantenkriterium

Satz 9.3 (Majorantenkriterium): Seien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ zwei unendliche Reihen und gelte

$$b_n \geq |a_n| \quad \text{für alle } n \geq n_0 \quad (n_0 \text{ fest}) \ .$$

Dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, falls $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent ist.

Kurz:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konvergent} \quad &\Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergent} \\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergent} \quad &\Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ divergent (Umkehrung)} \end{aligned}$$

■

Bemerkung 9.4: Zum Vergleich werden gerne die geometrischen Reihen herangezogen.

Unter einer *geometrischen Reihe* versteht man die folgende unendliche Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} \quad \text{mit } a, q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Sie konvergiert für $|q| < 1$ und besitzt dann als Summe

$$S = \frac{a}{1-q}$$

Beispiel 9.5

9.2.2 Quotientenkriterium

Satz 9.6 (Quotientenkriterium, Kriterium von d'Alembert): Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine unendliche Reihe.

$$\text{Gilt } \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q < 1, \text{ so ist } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergent.}$$

Für $q > 1$ ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent, für $q = 1$ kann keine Aussage gemacht werden (dann ist eine Untersuchung mit anderen Kriterien erforderlich).

■

Beispiel 9.7

9.2.3 Wurzelkriterium

Satz 9.8 (Wurzelkriterium, Cauchysches Wurzelkriterium): Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine unendliche Reihe.

$$\text{Gilt } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q < 1, \text{ so ist } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergent.}$$

Für $q > 1$ ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent, für $q = 1$ kann keine Aussage gemacht werden (dann ist eine Untersuchung mit anderen Kriterien erforderlich).

■

Bemerkung 9.9: Das Wurzelkriterium ist schärfer als das Quotiententenkriterium, d. h. das Wurzelkriterium kann in allen Fällen, in denen das Quotientenkriterium anwendbar ist, angewendet werden. Darüberhinaus gibt es noch Fälle, in denen nur das Wurzelkriterium ein Resultat liefert. Im allgemeinen ist die Anwendung des Wurzelkriteriums aber komplizierter.

Beispiel 9.10

9.2.4 Cauchysches Integralkriterium

Satz 9.11 (Cauchysches Integralkriterium): Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine unendliche Reihe mit monoton fallenden Gliedern a_n, d. h. $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq ... \geq a_n \geq a_{n+1} \geq ... > 0$ und sei $f(x)$ eine stetige monoton fallende Funktion mit $f(n) = a_n$. ($f(x)$ interpoliert die Reihe). Dann gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ konvergent} \Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(x)\,dx \text{ konvergent.}$$

■

Beispiel 9.12

9.2.5 Leibnizsches Konvergenzkriterium für alternierende Reihen

Satz 9.13 (Leibnizsches Konvergenzkriterium): Sei $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ...$ eine alternierende Reihe mit $a_n > 0$. Sie ist konvergent, wenn gilt:

1.) $a_1 > a_2 > a_3 > ... > a_n > a_{n+1} > ...$
2.) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

■

Bemerkung 9.14: Die 2. Bedingung ($\lim_{n\to\infty} a_n = 0$) ist eine notwendige Bedingung. Ist sie nicht erfüllt, so divergiert die Reihe. Beide Bedingungen besagen, dass die Glieder a_n eine monoton fallende Nullfolge bilden (dies ist hinreichend für die Konvergenz einer alternierenden Reihe).

Beispiel 9.15

9.3 Potenzreihen

Unendliche Reihen, bei denen die Glieder keine Zahlen aus $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$, sondern Funktionen sind, heißen Funktionsreihen.

Die Glieder der Funktionsreihen bilden eine Funktionenfolge $\{f_n(x), x \in \mathbb{R}\}$ bzw. $\{f_n(z), z \in \mathbb{C}\}$. Aus der Menge der Funktionsreihen werden die Potenzreihen (als wichtigste Vertreter) herausgegriffen.

9.3.1 Definition

Definition 9.16: Eine unendliche Reihe der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + ... \qquad a_n \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$$

heißt *Potenzreihe.*

Dabei ist x_0 der *Entwicklungspunkt* der Potenzreihe.

Für $x_0 = 0$ entsteht die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... \qquad a_n \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$$

■

Bemerkung 9.17: In der Praxis treten die Potenzreihen meist in der Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ auf.

Durch die Substitution $t = x - x_0$ kann die allgemeine Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ auf die spezielle Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ gebracht werden.

9.3.2 Konvergenz einer Potenzreihe

Die Fragestellung lautet hier nicht einfach Konvergenz oder Divergenz, sondern: „Für welche Werte von x konvergiert die Potenzreihe?"

Satz 9.18: Zu jeder Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

gibt es ein ρ mit $0 \leq \rho \leq \infty$, so dass die Potenzreihe für alle x mit $|x - x_0| < \rho$ *konvergiert* und für alle x mit $|x - x_0| > \rho$ *divergiert*.

ρ heißt der *Konvergenzradius* der Potenzreihe. Er wird wie folgt ermittelt:

$$\rho = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

■

Bemerkung 9.19

Beispiel 9.20

9.3.3 Eigenschaften von Potenzreihen

Die wichtigsten Eigenschaften von Potenzreihen werden im folgenden Satz zusammengefasst.

Satz 9.21:

1. Eine Potenzreihe konvergiert innerhalb ihres Konvergenzkreises *absolut*.
2. Eine Potenzreihe darf innerhalb ihres Konvergenzkreises *gliedweise differenziert* und *integriert* werden. Die dabei jeweils entstehende neue Potenzreihe besitzt den *gleichen Konvergenzkreis* wie die ursprüngliche Potenzreihe.
3. Zwei Potenzreihen dürfen im gemeinsamen Konvergenzbereich *gliedweise addiert* und *multipliziert* werden. Die dabei jeweils entstehende neue Potenzreihe konvergiert mindestens im gemeinsamen Konvergenzbereich der beiden ursprünglichen Potenzreihen.

■

9.4 Entwicklung von Funktionen in Potenzreihen, Taylorsche Formel, Taylor-Reihe, MacLaurin-Reihe

Satz 9.22 (Taylorsche Formel): Die Funktion f sei im beschränkten Intervall $[x_0, x]$ $(n+1)$-mal stetig differenzierbar. Dann gilt

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k + R_n \qquad \text{mit } R_n = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt$$

R_n heißt das n-te Restglied der Taylorentwicklung von f um x_0.

D. h. jede Funktion $f(x)$, die im Inneren eines Intervalls, das den Punkt $x = x_0$ enthält, stetige Ableitungen bis zur $(n+1)$-ten Ordnung besitzt, kann für alle x aus diesem Intervall nach Potenzen der Differenz $x - x_0$ entwickelt werden.

■

Die Taylorsche Formel gibt also eine Darstellung einer Funktion f als Summe eines Polynoms n-ten Grades und des Restgliedes R_n. In vielen Fällen lässt sich zeigen, dass R_n für $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert.

Es gilt

Satz 9.23 (Taylor-Reihe): Gelte $R_n \to 0$ für $n \to \infty$ .Dann ergibt sich aus der Taylorschen Formel die *Taylor-Reihe*:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k$$

(„Entwicklung der Funktion $f(x)$ in eine Taylor-Reihe").
Dabei heißt x_0 der Entwicklungspunkt der Taylor-Reihe.

■

Bemerkung 9.24

Bemerkung 9.25: Die *MacLaurin-Reihe* ergibt sich als Spezialfall der Taylor-Reihe für $x_0 = 0$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)\, x^k$$

Beispiel 9.26

Bemerkung 9.27: Für die Potenzreihenentwicklungen wichtiger Funktionen gibt es Tabellen.

9.5 Fourier-Reihen

Die Fourier-Reihen stellen eine weitere Möglichkeit dar, Funktionen durch unendliche Reihen darzustellen. Sie eignen sich insbesondere für periodische Funktionen.

Satz 9.28 (Fourier-Reihe) Sei $f(t)$ eine reelle Funktion mit der Periodendauer T und der Kreisfrequenz $\omega = \frac{2\pi}{T}$, die in endlich vielen Teilintervallen von T jeweils *stetig* und *monoton* ist. Dann lässt sich $f(t)$ als *Fourier-Reihe* darstellen und es gilt

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)]$$

Dabei sind a_n und b_n die *Fourierkoeffizienten* mit

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,dt \quad n = 0,1,2,...$$
$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\,dt \quad n = 1,2,3,...$$

■

Skizze 9.29

Bemerkung 9.30:

1. Die Schwingung mit der Kreisfrequenz ω heißt *Grundschwingung*, bzw. *1. harmonische Schwingung*, die Schwingungen mit den Kreisfrequenzen $n\omega$ $(n = 2,3,4,...)$ heißen *Oberschwingungen*, bzw. *n-te harmonische Schwingungen.*

2. Die Darstellung einer Funktion $f(t)$ als Fourier-Reihe kann auch als Zerlegung von $f(t)$ in harmonische Schwingungen (Grundschwingung und Oberschwingungen) angesehen werden. Diese Zerlegung nennt man auch *harmonische Analyse* oder *Fourier-Analyse.*

3. Da $f(t)$ eine Funktion mit der Periode T ist, kann anstelle des Intervalls $(0, T)$ auch ein anderes Intervall der Länge T verwendet werden, z. B. das Intervall $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$.

4. Aus der Definition der Fourierkoeffizienten folgt

$$\left\{\begin{array}{llll} a_n = 0 & (n = 0,1,2,...) & \text{,falls } f(t) \text{ ungerade} & \text{,d.h. } f(-t) = -f(t) \text{ gilt} \\ b_n = 0 & (n = 1,2,3,...) & \text{,falls } f(t) \text{ gerade} & \text{,d.h. } f(-t) = f(t) \text{ gilt} \end{array}\right\}$$

Beispiel 9.31
■

Übungsaufgaben
Ingenieur-Mathematik I
2. Semester

Prof. W. Tischhauser

2003

Übungsaufgaben

Ingenieur-Mathematik I

2. Semester

Aufgabe 7.1: Differenziere die folgenden Funktionen.

a) $f(x) = \dfrac{x^3 - 4x + 5}{2x^2 - 4x + 1}$

b) $f(x) = \ln(\sin(2x - 3))$

c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{1 - x^2}}$

d) $f(x) = \tan(x^{\cos x})$

Aufgabe 7.2: Wie lautet die n-te Ableitung von

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{für } x \neq 0 \qquad ?$$

Aufgabe 7.3: Berechne die folgenden Grenzwerte

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin^2 x}{\tanh^2 x}$

b) $\lim\limits_{x \to 1-\varepsilon} \sqrt[3]{(1 - x^2)}\, \operatorname{artanh} x \qquad (\varepsilon \in \mathbb{R}^+)$

c) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^n}{e^x} \qquad (n \in \mathbb{N})$

Aufgabe 7.4: Nähere die Funktion

$$f(x) = e^x$$

in der Umgebung von $x_0 = 0$ durch eine lineare Funktion an. Vergleiche die Näherung mit den exakten Werten für $x = 0,01$, $x = 0,1$ und $x = 0,2$.

Aufgabe 7.5: Gegeben ist ein Wechselstromkreis, der aus einer Reihenschaltung von R, C und L besteht. Eingangsspannung und Eingangsstrom sind wie folgt gegeben:

$$u = u_0 \sin \omega t$$
$$i = i_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

a) Skizziere den Wechselstromkreis.

b) Bei welcher Kreisfrequenz ω_r nimmt der Scheitelwert i_0 des Wechselstroms i seinen größten Wert an?

Hinweis: Es gilt

$$i_0 = \frac{u_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{u_0}{Z} \qquad \text{für } \omega > 0$$

i_0 wird am größten, wenn der Scheinwiderstand Z am kleinsten wird. Es genügt also, das absolute Minimum der Funktion

$$f(\omega) = R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2$$

zu bestimmen.

Aufgabe 8.1: Löse die folgenden Integrale durch Substitution.

a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{1-2x}}dx$

b) $\displaystyle\int \frac{(\arctan x)^2}{(1+x^2)}dx$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{x \ln x}dx$

d) $\displaystyle\int \sqrt{-4x^2 + 12x + 7}dx$

Hinweis zu d): Forme den Radikanten so um, dass die Substitution des Integraltyps D (vergleiche Vorlesung) möglich ist.

Aufgabe 8.2: Löse die folgenden Integrale durch partielle Integration.

a) $\displaystyle\int \sin^2 x dx$

b) $\displaystyle\int x^2 \cos x dx$

Aufgabe 8.3:

a) Löse das folgende Integral durch Partialbruchzerlegung

$$\int \frac{2x^3 - 14x^2 + 14x + 30}{x^2 - 4} dx$$

b) Wie lautet die Partialbruchzerlegung von

$$\frac{2x - 7}{(x^2 + 1)(x^2 - 2x + 4)} \qquad ?$$

Aufgabe 8.4: Existieren die folgenden uneigentlichen Integrale? Falls ja, ist der Integralwert zu bestimmen.

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} 2xe^{-x^2} dx$

b) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \sqrt{x} dx$

c) $\displaystyle\int_{2}^{4} \frac{1}{\sqrt{x - 2}} dx$

Aufgabe 9.1: Untersuche die Konvergenz folgender unendlicher Reihen.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}$ mit Hilfe des Quotientenkriteriums

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\tfrac{3}{2}\right)^{n^2}$ mit Hilfe des Wurzelkriteriums

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ $(\alpha > 1)$ mit Hilfe des Cauchyschen Integrlkriteriums

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n!}$ mit Hilfe des Leibnizschen Konvergenzkriteriums

Aufgabe 9.2: Für welche Werte von x konvergiert die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x - 1)^n}{n} \qquad ?$$

Aufgabe 9.3: Entwickle die logarithmische Funktion $f(x) = \ln x$ in eine Taylor-Reihe. Wähle dazu den Entwicklungspunkt $x_0 = 1$.

Aufgabe 9.4: Entwickle die folgende Funktion $f(t)$ in eine Fourierreihe.

$$f(t) = \left\{ \begin{array}{rll} 1 & \text{für} & 0 \leq t \leq \pi \\ -1 & \text{für} & \pi < t < 2\pi \end{array} \right\}$$