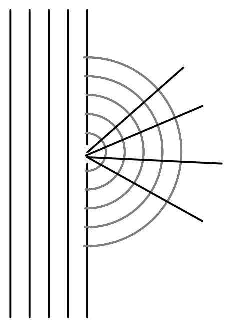
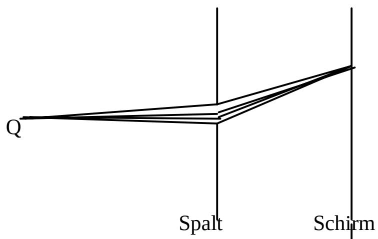
4.3 Beugung am Einzelspalt



Beugung bedeutet Ablenkung von Wellen um ein Hindernis (Kante).

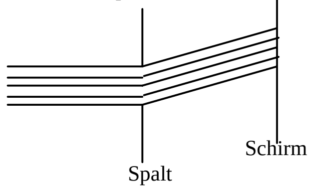
Fresnel–Beugung: Quelle und Schirm stehen in endlichem Abstand zur Blende.

<u>Fraunhofer–Beugung:</u> Quelle und Schirm stehen in $\to\infty$ Abstand zum Spalt.[1]

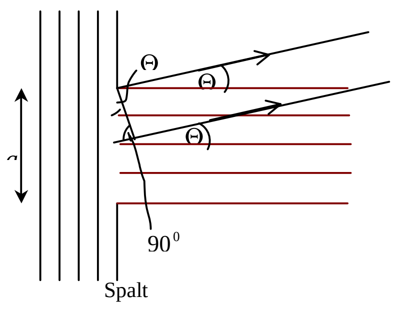


$\Theta = 0$: Zentrales Maximum.

Für $\frac{a}{2}\cdot\sin\Theta = \frac{\lambda}{2}$ ergibt sich das erste Minimum:[2]



Jeder Strahl in der oberen Spalthälfte löscht sich mit einem Strahl, dessen Ursprung um $\frac{a}{2}$ entfernt liegt, aus. Das zweite Minimum ist erreicht, wenn es für den Winkel Θ jeweils zwei solcher sich auslöschenden Paare gibt:

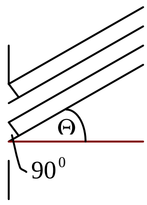


---

[1] S. Interferenz Doppelspalt: $e \succ d$. Praxis: Fraunhofer mit Sammellinsen.

[2] Für $a\downarrow\lambda \;\Rightarrow\; \Theta\uparrow 90^0$.

$$\frac{a}{4}\cdot\sin\Theta=\frac{\lambda}{2}.$$

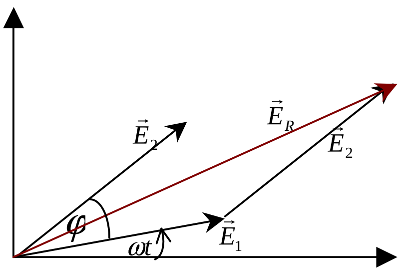


$\Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l}\text{Beugungs}-\text{Minima für}\\ a\sin\Theta=m\cdot\lambda\,,\quad m=1,2,\ldots\end{array}}$, $a=$ Breite des Schlitzes.

Dazwischen liegen Maxima.

Bsp.: Welche Breite hat ein Spalt, für den mit rotem Licht ($\lambda=650$ nm) das erste Minimum unter einem Winkel von 30^0 auftritt?

$$\underline{\underline{a}}=\frac{\lambda}{\sin\Theta}=1300\text{ nm}=\underline{\underline{1.3\ \mu\text{m}}}.$$



Berechnung der Intensität auf dem Schirm:

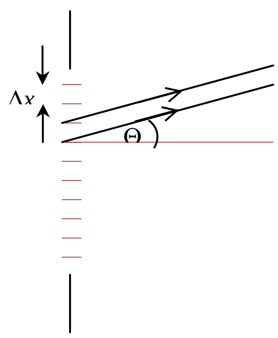
Geometrische Addition zweier Wellen im Zeigerdiagramm:

$$E_1=E_0\sin(\omega t),\quad E_2=E_0\sin(\omega t+\varphi).$$ [3]

$$E_1+E_2=2E_0\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\sin\left(\omega t+\frac{\varphi}{2}\right)=E_R\cdot\sin\left(\omega t+\frac{\varphi}{2}\right)$$

Die resultierende Amplitude ist E_R.

Genauso für mehrere Wellen.

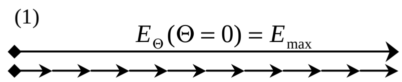


Wir denken uns den Einzelspalt in N Abschnitte unterteilt, jeweils der Breite Δx.

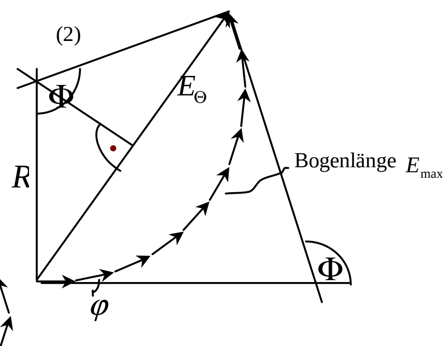
Die Phasendifferenz φ zwischen zwei benachbarten Wellen ist gegeben durch

$$\varphi=\frac{\text{Gangunterschied}}{\lambda}\cdot 2\pi\quad\Rightarrow\quad\varphi=\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\Delta x\sin\Theta.$$

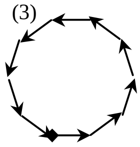
Zur Berechnung der resultierenden Amplitude E_Θ bei einem Winkel Θ sind alle N Wellen unter Berücksichtigung ihrer Phasenbeziehung aufzuaddieren:



(1) $\Theta=0$: $\varphi=0$,
$E_\Theta=E_{max}$



(2) Bogenlänge E_{max}.

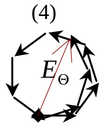


(3) $E_\Theta=0,\quad\varphi=\frac{360^0}{N}\quad\Leftrightarrow\quad$ 1. Minimum! [4]

[3] Die Projektion auf die $y-$Achse gibt die zeitlich oszillierende $E-$Feldstärke.

[4] $\varphi=\frac{2\pi}{a}\cdot\Delta x=\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\Delta x\sin\Theta\quad\Rightarrow\quad\lambda=a\sin\Theta\,!$

(4) 1. Maximum, $E_\Theta < E_{\max}$ ($I \propto E_\Theta^2$).



Berechnung von $I_\Theta = I(\Theta)$:

Aus Abbildung (2) folgt: $E_\Theta = 2 \cdot R \sin\frac{\phi}{2}$. Mit $E_{\max} = R \cdot \phi$ folgt[5]

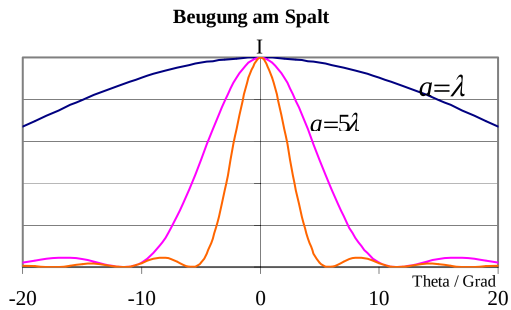
$$E_\Theta = \frac{E_{\max}}{\phi/2} \cdot \sin\frac{\phi}{2}.$$

$\phi =$ Phasendifferenz zwischen den äußersten Spaltstrahlen:

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot a \sin\Theta$$

$$\Rightarrow \quad E_\Theta = \frac{E_{\max}}{\alpha} \sin\alpha, \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{\phi}{2} = \frac{\pi}{\lambda} a \sin\Theta.$$

Intensität: $\boxed{I_\Theta \propto E_\Theta^2 \propto \underbrace{E_{\max}^2}_{I_{\max}} \cdot \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2}$



<u>Minima:</u> $I_\Theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = m \cdot \pi, \quad \underline{m = 1, 2, 3, \dots}$

oder $\underline{a \sin\Theta = m \cdot \lambda}$.

<u>Bsp.:</u> Bestimme die Halbwertsbreite $\Delta\Theta$ des zentralen Maximums bei Fraunhofer–Beugung.

$$I_\Theta = \frac{1}{2} I_{\max} = I_{\max} \cdot \left(\frac{\sin\alpha_x}{\alpha_x}\right)^2$$

$$⇨ \left(\frac{\sin\alpha_x}{\alpha_x}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

Graphische Lösung für α_x:

Zeichne $f(\alpha) = \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2$ und bestimme α_x mit $f(\alpha_x) = \frac{1}{2}$.

⇨ $\underline{\underline{\alpha_x \approx 1.4 \text{ rad}}} \approx 80^0$.[6]

Bestimme nun Θ_x:

$$\alpha_x = \frac{\pi}{\lambda} \cdot a \sin\Theta_x \quad \Rightarrow \quad \sin\Theta_x = \frac{\lambda}{a} \cdot \frac{\alpha_x}{\pi}.$$

Für $\frac{a}{\lambda} = 5 \quad \Rightarrow \Theta_x = 5.1^0$

⇨ Halbwertsbreite $\underline{\underline{\Delta\Theta}} = 2\Theta_x = \underline{\underline{10.2^0}}$.

4.4 Doppelspalt

Überlagerung von Interferenz und Beugung. $d =$ Abstand der Schlitze,
$a =$ Schlitzbreite.

---

[5] $N \to \infty, \quad \Delta x \to dx$

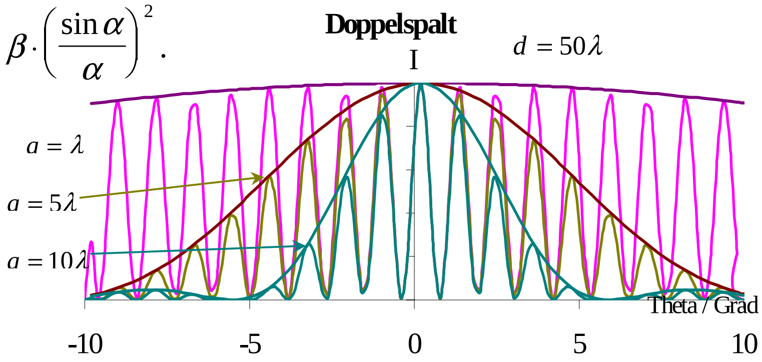
[6] Der maximal mögliche Ablenkwinkel ist $\Theta = 90^0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_{\max} = \frac{a}{\lambda} \cdot \pi$.

Intensität: $I_{\Theta,\text{Interferenz}} \propto 4E_0^2 \cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda}\sin\Theta\right) := I_{\text{max, Interferenz}} \cdot \cos^2\beta, \quad \beta = \frac{\pi d}{\lambda}\sin\Theta$

$$I_{\Theta,\text{Beugung}} \propto I_{\text{max, Beugung}} \cdot \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2, \quad \alpha = \frac{\pi a}{\lambda}\sin\Theta.$$

Kombination: $I_{\text{max, Interferenz}}$ ist die durch $I_{\Theta,\text{Beugung}}$ gegebene variable Amplitude.

⇨ $I_\Theta = I_{\max} \cdot \cos^2\beta \cdot \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2.$



<u>Bsp.:</u> Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, damit im zentralen Beugungsmaximum (der Einhüllenden) genau 11 Interferenzstreifen liegen?
1. Beugungsminimum = 6. Interferenzminimum ($m = 5$):

$$\sin\Theta = \frac{\lambda}{a} = 5\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\lambda}{d} \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{\frac{d}{a} = 5.5}} = \frac{11}{2} \qquad \text{(unabhängig von } \lambda\text{!)}$$

4.5 Lochblende

Für eine Lochblende liegt das erste Beugungsminimum bei

$\sin\Theta = 1.22\frac{\lambda}{d}$, $\qquad d$ = Durchmesser der runden Öffnung.[7]

Auflösungsvermögen: Zwei Punktquellen sind auflösbar, wenn das zentrale Maximum der zweiten Quelle auf das erste Minimum der ersten Quelle (oder weiter weg) fällt:

$$\boxed{\Theta_{\min} = \arcsin\left(1.22\frac{\lambda}{d}\right) \approx 1.22\frac{\lambda}{d}} \qquad \Rightarrow\ d \text{ groß, } \lambda \text{ klein.}^{8}$$

[7] Beim Einzelspalt ist die Länge des Schlitzes $l \succ a$. d könnte z.B. der Durchmesser einer Teleskop–Linse (–Spiegel) sein. Weitere Minima liegen bei $\sin\Theta = 2.23\frac{\lambda}{d},\quad 3.24\frac{\lambda}{d},\quad 4.24\frac{\lambda}{d},\quad \ldots$.

[8] Ist der Winkel $\Theta > \Theta_{\min}$, dann sind die beiden Objekte getrennt sichtbar.