I Schwingungen

1 Einführung

Charakteristisches Merkmal einer jeden Schwingung ist der periodische Verlauf gewisser Eigenschaften. D.h. es gibt eine oder mehrere Merkmale, sich in konstanten Zeitabständen (der „Periode T“) ständig wiederholen.

Eine Welle ist eine sich fortpflanzende Schwingung: Teilchen werden von ihren schwingenden Nachbarteilchen ebenfalls zur Schwingung angeregt, sie regen selbst wiederum ihre Nachbarteilchen zu Schwingungen an usw. Auf diese Art kann Energie über weite Strecken übertragen werden; die Teilchen selbst bewegen sich dagegen kaum! In einer „stehenden Welle“ findet keine Energieübertragung statt.

Bsp. für Schwingungen: Unruhe einer Uhr, Violinsaite, Masse an einer Schraubenfeder, Atome eines Moleküls oder in einem Festkörper, Luftmoleküle in einer Schallwelle, elektromagnetische Wellen (oszillierende Feldvektoren).

Bei gedämpften Schwingungen verliert das System in jeder Periode Energie (Reibung) ⇨ Die Amplitude der Schwingung nimmt ab. ⇨ Durch Energiezufuhr ausgleichen.

Bsp.: Feder in der Uhr, Pendel der Pendeluhr.

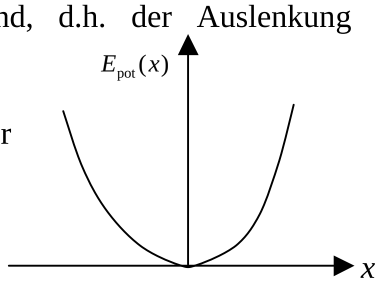
Die Frequenz ν der Schwingung ist die Anzahl der Zyklen pro Zeiteinheit:

$$\nu = \frac{1}{T} \; \left[\mathrm{s}^{-1}\right] \; \text{"Hertz"}\,(\mathrm{Hz})\,.$$

2 Harmonischer Oszillator

Ein einer periodischen Schwingung unterliegendes Teilchen durchläuft ständig einen Gleichgewichtspunkt x_0, in dem die auf es einwirkende Kraft = 0 bzw. wegen $F = -\frac{dE_{pot}}{dx}$ die potentielle Energie ein Extremum (Minimum) aufweist.

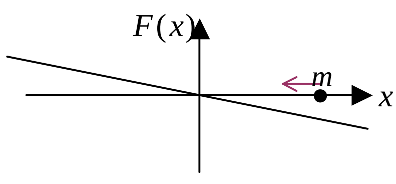
Die Kraft F ist bei einer Schwingung immer rücktreibend, d.h. der Auslenkung entgegengerichtet. Daher ist x_0 ein Punkt stabilen Gleichgewichts.



Für einen harmonischen Oszillator betrachten wir ein Potential der Form

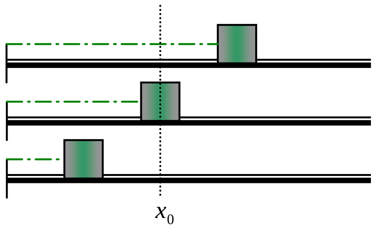
$$E_{pot} = \frac{1}{2} k x^2,\; k = \text{konst.}$$

$$F(x) = -\frac{dE_{pot}}{dx} = -kx$$



vgl. Kraftgesetz einer Schraubenfeder, k = Federkonstante.

$$F = -kx = ma = m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2}$$



$$\boxed{\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}\cdot x \qquad \text{DGL}}$$

Die DGL ist die „Bewegungsgleichung“ des Teilchens, denn die Lösung der DGL: $x(t)$, die die DGL erfüllt, beschreibt die Bewegung x als Funktion von t.
Lösungen der DGL sind die Sinus- und Cosinus-Funktion:
$x(t) = A\cdot\cos(\omega t+\varphi)\{= A\cos\varphi\cos(\omega t) - A\sin\varphi\sin(\omega t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)\}$.
Dieser Ansatz erfüllt nämlich die DGL, wenn wir ω geeignet wählen:
Einsetzen von $x(t)$ in die DGL:

$$\dot{x} = -A\omega\sin(\omega t+\varphi), \quad \ddot{x} = -A\omega^2\cos(\omega t+\varphi):$$

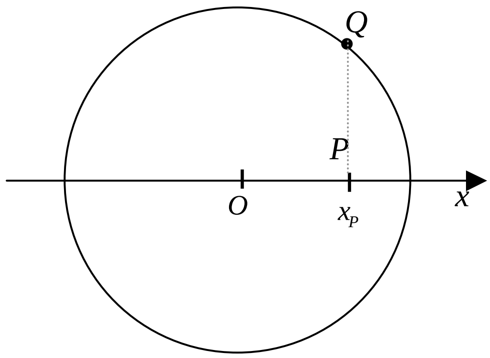
$$-A\omega^2\cos(\omega t+\varphi) = -\frac{k}{m}\cdot A\cos(\omega t+\varphi)$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m} \quad \text{oder} \qquad \boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

Mit diesem ω erfüllt also $x(t) = A\cos(\omega t+\varphi)$ die Bewegungsgleichung!
Die Amplitude A und der Startwinkel φ, der die Auslenkung x zur Zeit $t=0$ festlegt, sind frei wählbar ➪ Die Lösung $x(t)$ beschreibt alle möglichen Schwingungen des Systems mit beliebiger Anfangsauslenkung und -geschwindigkeit.
Allein die „Kreisfrequenz“ ω, die mit der Periode T über

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$$ [1]

zusammenhängt, ist durch die Federkonstante k und die angekoppelte Masse m festgelegt.
Die Lösungsfunktionen sin und cos heißen auch „harmonische Funktionen“, daher der Name „harmonische Schwingung“.
Alle physikalischen Systeme, in denen eine rücktreibende Kraft wirkt, die der Auslenkung proportional ist, vollführen eine harmonische Schwingung.[2] Sie werden alle analog zu obigen Gleichungen beschrieben.



Die Kreisfrequenz $\omega = \frac{2\pi}{T}$ eines schwingenden Teilchens P ist identisch mit der Winkelgeschwindigkeit eines gleichförmig kreisbewegten Teilchens Q, das auf einem Kreis mit Radius A = Amplitude des schwingenden Teilchens P umläuft:
x_P ist die Projektion der Position von Q auf die $x-$Achse.
Die Periode für Q und P ist identisch: $T = \frac{2\pi}{\omega}$

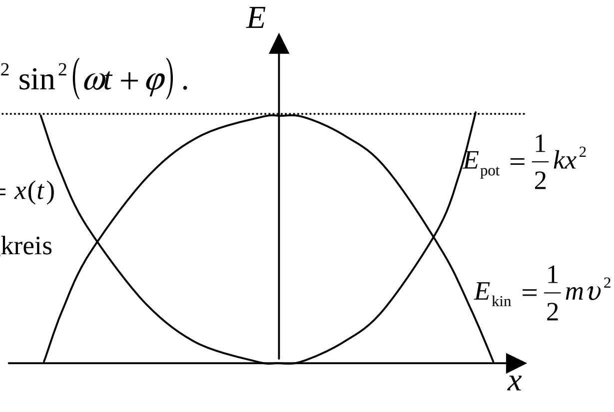
$\Rightarrow$ Kreisfrequenz$(P) \equiv$ Winkelgeschwindigkeit(Q).

Die potentielle Energie eines harmonisch schwingenden Systems ist gegeben durch

$$E_{pot} = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi),$$

die kinetische Energie ist

$$E_{kin} = \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m\left(-A\omega\sin(\omega t+\varphi)\right)^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t+\varphi).$$



---

[1] $T = \frac{2\pi}{\omega}$, denn $x(t+T) = A\cos\left(\omega\left(t+\frac{2\pi}{\omega}\right)+\varphi\right) = A\cos(\omega t+\varphi+2\pi) = x(t)$

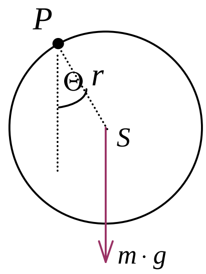
[2] Vibrierende Saite, Membran, Schall, Gitterschwingungen, el. Schwingkreis

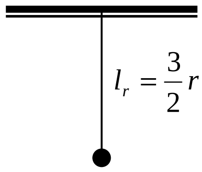
Die Gesamtenergie zu jedem Zeitpunkt ist somit

$$\underline{\underline{E_{ges}}} = E_{kin} + E_{pot}$$

$$= \frac{1}{2} m A^2 \frac{k}{m} \sin^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2} k A^2}} = \text{konst.}$$





Bsp.: Eine Scheibe ist an ihrem Rand in einem Angelpunkt aufgehängt. Bestimme ihre Schwingungsperiode für kleine Auslenkungen und die Länge eines mathematischen Pendels gleicher Periode.

$$M = J \cdot \alpha = J \cdot \ddot{\Theta} = -mgr \sin\Theta$$

Für kleine Auslenkungen ist $\sin\Theta \approx \Theta$[3]:

$$\ddot{\Theta} = -\frac{mgr}{J_P} \cdot \Theta, \quad \mathrm{J_P} = \int \tilde{r}^2 dm = J_S + mr^2 = \frac{3}{2} mr^2 \quad \text{(Steinerscher Satz)}$$

$$\ddot{\Theta} = -\frac{2}{3}\frac{g}{r} \cdot \Theta \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{2}{3}\frac{g}{r}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{T}} = \frac{2\pi}{\omega} = \underline{\underline{2\pi \cdot \sqrt{\frac{3r}{2g}}}}$$

Für ein mathematisches Pendel gilt genauso:

$$J = ml^2,$$

$$\ddot{\Theta} = -\frac{mgl}{ml^2}\Theta = -\frac{g}{l}\Theta$$

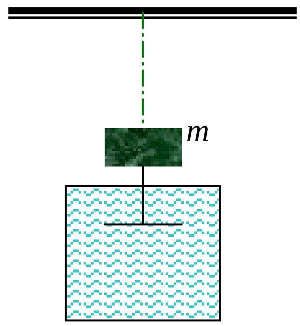
$$\Rightarrow \omega_m = \sqrt{\frac{g}{l}} = \frac{2\pi}{T}$$

Die Perioden der Scheibe und des mathematischen Pendels sollen übereinstimmen:

$$2\pi\sqrt{\frac{3r}{2g}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad \Rightarrow \underline{\underline{l = \frac{3}{2} r}}$$

"reduzierte Pendellänge" des physikalischen Pendels

Gedämpfte Schwingung



Oft kann die Reibung als proportional zur Geschwindigkeit angenommen werden[4]:

$$F_R = -\beta \upsilon \qquad \left(\vec{F}_R \uparrow\downarrow \vec{\upsilon}\right)$$

⇨ Bewegungsgleichung:

$$F = m \cdot a = m\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{\beta}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad \text{DGL}$$

---

3 $\Theta = 15^0 = 0.2618$ rad: $\sin\Theta = 0.25882$, $\Delta / \% = 1.15$.

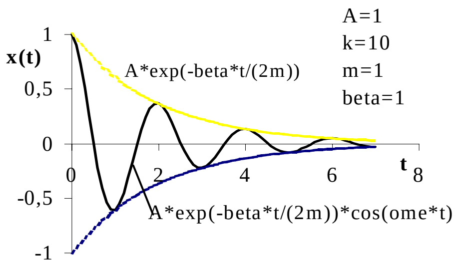
4 Festkörper – Festkörper: F_R unabhängig von υ; Viskose Reibung bei der Bewegung durch Flüssigkeiten (Stokes): $F_R \propto \upsilon$; Luftwiderstand ungünstig geformter Körper, hohe Geschwindigkeiten: $F_R \propto \upsilon^2$. In Flüssigkeiten und Gasen sind i.a. beide Anteile ($F_R \propto \upsilon$ und $F_R \propto \upsilon^2$) vorhanden.

Allgemeine Lösung in der komplexen Ebene:
$x(t) = Ae^{i\lambda t}$[5], $(i = \sqrt{-1})$, einsetzen in DGL liefert für λ die charakteristische Gleichung:

$$-\lambda^2 + i\frac{\beta}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{i\beta}{2m} \pm \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\beta^2}{4m^2}}$$

$$\Rightarrow x(t) = Ae^{i\lambda t} = \underbrace{Ae^{-\frac{\beta t}{2m}}}_{\text{Amplitude}} \cdot \underbrace{e^{\pm i\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\beta^2}{4m^2}}\cdot t}}_{\cos(\omega_e t) \pm i \sin(\omega_e t)}$$



i) Die Amplitude ist exponentiell gedämpft;

ii) Die Kreisfrequenz $\underline{\underline{\omega_e = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\beta^2}{4m^2}}}}$ ist kleiner als bei der ungedämpften Schwingung

$(\beta = 0: \quad \omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$);

iii)Für $\frac{\beta^2}{4m^2} > \frac{k}{m}$ findet keine Schwingung mehr statt:

$\beta = 2\sqrt{km} = 2m\omega_0$: aperiodischer Grenzfall mit $\omega_e = 0$.

Erzwungene Schwingung

Das schwingende System unterliege einer äußeren periodischen Kraft $F_0 e^{i\omega t}$ der Kreisfrequenz ω.[6]

Bewegungsgleichung:

$m\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x} + F_0 e^{i\omega t}$ DGL.

In der partikulären Lösung muß $x(t)$ den Faktor $e^{i\omega t}$ enthalten ⇨ Das System schwingt mit der von außen aufgezwungenen Periode:

$x(t) = A \cdot e^{i(\omega t - \alpha)}$[7]; einsetzen in DGL:

$$A\left(-m\omega^2 + i\omega\beta + k\right) = F_0 \cdot e^{i\alpha}$$

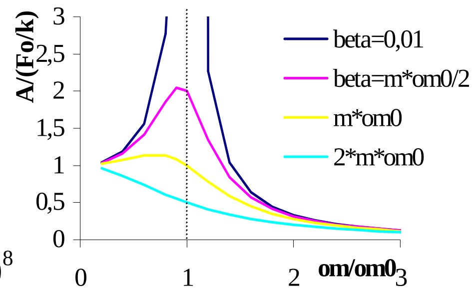
$$\Rightarrow \frac{F_0}{A} \cdot e^{i\alpha} = -m\omega^2 + k + i\omega\beta$$

$$= m\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) + i\omega\beta$$

$$\Rightarrow \left|\frac{F_0}{A}\right| = \sqrt{\left[m\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\right]^2 + \omega^2\beta^2}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{A = \frac{F_0}{\sqrt{\left[m\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\right]^2 + \omega^2\beta^2}}}}$$

(1)[8]

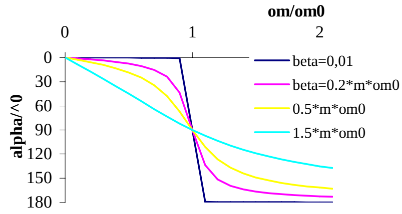


[5] Die durch die Anfangsbedingung festgelegte Phase φ ist hier =0 gesetzt.

[6] Bsp.: Soldaten marschieren über Brücke, Motorgehäuse, Schallwellen treffen auf Stimmgabel, Schaukel + Kind…

[7] α ist die Phasendifferenz zwischen $F_0(t)$ und $x(t)$.

Die Amplitude ist abhängig von β und von $\frac{\omega}{\omega_0}$:



$$\omega_{\max} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\beta^2}{2m^2}}, \quad A_{\max} = \frac{F_0}{\beta\omega_e}.$$ [9i]

Die Phasendifferenz α zwischen äußerer Kraft F_0 und Auslenkung $x(t)$ ist gegeben durch (s. **Gl.(1)**)[10]:

$$\tan\alpha = \frac{\omega\beta}{m\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}$$

Im Einschwingvorgang ist der hier angegebenen Schwingung noch eine mit der Eigenfrequenz ω_e überlagert, die aber mit der Zeit exponentiell abklingt.[11]

---

[i] Bestimmen durch: Nenner² = Min:

$$m^2\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \omega^2\beta^2 = \text{Min} = f(\omega^2)$$

$$\frac{df\left(\omega^2\right)}{d\left(\omega^2\right)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_{\max}^2 = \omega_0^2 - \frac{\beta^2}{2m^2} \qquad \vee$$

$$\Rightarrow \quad f\left(\omega_{\max}^2\right) = \text{Nenner}^2 = m^2\left(\frac{\beta^2}{2m^2}\right)^2 + \beta^2\omega_0^2 - \frac{\beta^4}{2m^2} = \beta^2\left[\frac{\beta^2}{4m^2} + \omega_0^2 - \frac{\beta^2}{2m^2}\right]$$

$$= \beta^2\left[\omega_0^2 - \frac{\beta^2}{4m^2}\right] = \underline{\underline{\beta^2 \cdot \omega_e^2}}$$

Für $\omega = \omega_0$ hinkt $x(t)$ $F(t)$ um $\frac{\pi}{2}$ hinterher.

---

[8] $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ ist das Quadrat der Eigenfrequenz des ungedämpften freien Oszillators.

[9] $\omega_{\max}$ ist die anregende Resonanzfrequenz, für die die Amplitude A maximal wird. ω_e ist die Eigenfrequenz des freien gedämpften harmonischen Oszillators. (Resonanzkatastrophe: Tacoma-Bridge, 1940)

[10] $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{F_0}{A}\cos\alpha = m(\omega_0^2 - \omega^2), \quad \frac{F_0}{A}\sin\alpha = \omega\beta \quad \Rightarrow \quad \tan\alpha = \frac{\omega\beta}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$

[11] Allgemeine Lösung der homogenen DGL, s. gedämpfte Schwingung.