II Wellen

1 Einführung

Eine Welle ist eine sich fortpflanzende Schwingung: Teilchen werden von ihren schwingenden Nachbarteilchen ebenfalls zur Schwingung angeregt, sie regen selbst wiederum ihre Nachbarteilchen *zu Schwingungen an usw. Auf diese Art kann Energie über weite Strecken übertragen werden; die Teilchen selbst bewegen sich dagegen kaum! In einer „stehenden Welle" findet keine Energieübertragung statt.*

Überall im Alltag treffen wir auf Wellen: Wasser, Schall, Licht, Radio, elektromagnetische… Gemeinsames Merkmal aller Wellen ist der räumliche (Periode λ = Wellenlänge) <u>und</u> zeitliche periodische Verlauf gewisser Eigenschaften.

Wellentypen

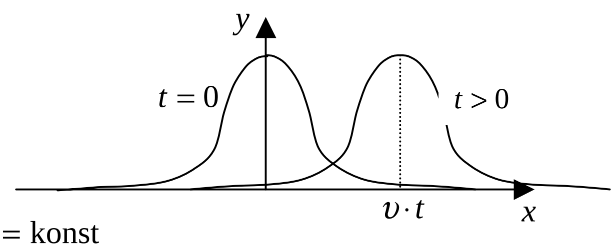
Es gibt

- elastische (mechanische) Wellen, die an ein Trägermedium gebunden sind. Ein Teil des Trägermediums wird aus der Gleichgewichtslage ausgelenkt und schwingt um diese. Diese Störung wird an die Nachbaratome übertragen ➩ eine Welle breitet sich aus. Sie überträgt Energie, ohne daß Materie in Richtung der Wellenausbreitung fließt.
  Bsp.: Wasser, Schall, gespannte Saite…
- elektromagnetische (e.m.) Wellen sind an kein Trägermedium gebunden; sie breiten sich auch im Vakuum aus. Die „schwingenden Eigenschaften" sind hier die Feldvektoren des elektrischen und magnetischen Feldes ($\vec{E}-$und $\vec{B}-$Feld).

Des weiteren unterscheidet man zwischen

- longitudinalen Wellen: Die schwingenden Teilchen bewegen sich vor und zurück in Richtung der Wellenausbreitung (Feder, Schall). ➩ Nur bei elastischen Wellen.
- Transversale Wellen: Die schwingenden Teilchen bewegen sich $\perp$ zur Ausbreitungsrichtung der Welle (gespannte Saite).
  Auch die e.m.–Wellen sind transversale Wellen: $\vec{E}-$ und $\vec{B}-$Feld stehen paarweise senkrecht aufeinander, und beide stehen senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung der Welle![1]

Wellenausbreitung



Eine transversale Welle[2] breite sich in

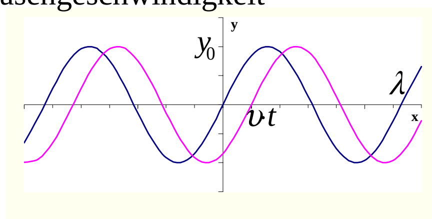
- $+x-$Richtung aus: $t = 0$: $y = f(x)$
  $t = t$: $y = f(x - \upsilon t)$ [3]
- Ausbreitung nach links: $y = f(x + \upsilon t)$

Phasengeschwindigkeit: $y = \text{konst} \quad \Rightarrow \quad x \mp \upsilon t = \text{konst}$

(wenn t wächst, $\begin{matrix}\text{wächst}\\ \text{fällt}\end{matrix}$ x)

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \pm\upsilon \quad = \text{Phasengeschwindigkeit}$$

Sinuswelle: $t = 0$: $\quad y = y_0 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot x\right)$



[1] $\vec{E}-$ und $\vec{B}-$Feld schwingen bei sich ausbreitenden Wellen in Phase.
[2] Gespannte Saite, e.m.–Welle…
[3] Keine Reibung: $\upsilon = \text{konst} =$ Wellengeschwindigkeit = <u>Phasengeschwindigkeit</u>.

y_0 = Amplitude
λ = Wellenlänge [4]
= Abstand Punkte gleicher Phase

Ausbreitung nach rechts: $y = y_0 \cdot \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - \upsilon t)\right]$

Nach der Periode T ist ein Teilchen bei x wieder in derselben Lage wie vorher, die Welle ist dabei um λ weitergewandert:

$$\upsilon = \frac{\lambda}{T} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\upsilon = \lambda \cdot \nu}$$

$$\Rightarrow \qquad y = y_0 \cdot \sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right]$$

Def.: Kreisfrequenz $\omega = \frac{2\pi}{T}$, Wellenzahl $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

$\Rightarrow y = y_0 \cdot \sin(kx - \omega t)$ (nach links: $y = y_0 \cdot \sin(kx + \omega t)$)

Phasengeschwindigkeit: $\upsilon = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k}$.

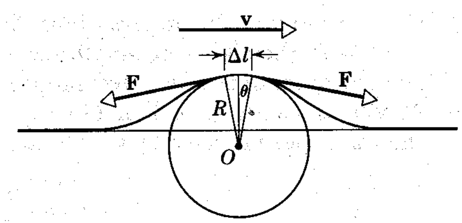
Beliebige Anfangsbedingung: $y = y_0 \cdot \sin(kx - \omega t - \varphi)$ [5]

Wellen verschiedener Amplitude, Phase und Wellenlänge überlagern sich störungsfrei, denn die Feldstärken addieren sich einfach auf.[6]

2 Elastische Wellen

Wir betrachten die Ausbreitung einer Welle entlang einer gespannten Saite.

Wellengeschwindigkeit:



Die Saite steht unter der Zugspannung F, sie werde transversal ausgelenkt. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle betrage υ. Wie der Abbildung zu entnehmen ist, resultiert aus der Spannung der Saite eine resultierende Kraft auf die ausgelenkten Teilchen in Richtung Kreismittelpunkt der Größe

$$F_{\text{res}} = 2F_{\perp} = 2F\sin\Theta \approx 2F\Theta = 2F\,\frac{\Delta l/2}{R} = F \cdot \frac{\Delta l}{R}.$$

Diese Kraft ist also eine Zentripetalkraft für die ausgelenkten Teilchen. Diese haben die Masse $m = \mu \cdot \Delta l$, wenn μ die Masse der Saite pro Länge bedeutet. Die Geschwindigkeit der

---

[4] $y(x + n \cdot \lambda) = y(x), \quad n \in \mathbb{Z}$.
[5] $y(t = 0, x = 0) = y_0 \cdot \sin(-\varphi)$
[6] Bei elastischen Wellen gilt das lineare Hook'sche Gesetz nur in Grenzen. Jenseits davon kommt es zu Dispersion und Dämpfung.

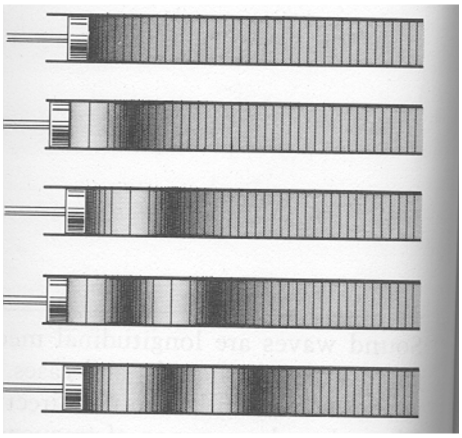
ausgelenkten Teilchen auf dem Kreisbogen ist gerade υ (die Welle wandert mit υ „unter den Teilchen hindurch"). Gleichsetzen von $F_{\text{res}} = F_{\text{Z}}$ ergibt:

$$F \cdot \frac{\Delta l}{R} = \mu \cdot \Delta l \cdot \frac{\upsilon^2}{R}$$

$\boxed{\Rightarrow \quad \upsilon = \sqrt{\frac{F}{\mu}}}$ für die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Welle auf einer mit F gespannten Saite der Massenbelegung μ.

Schallwellen

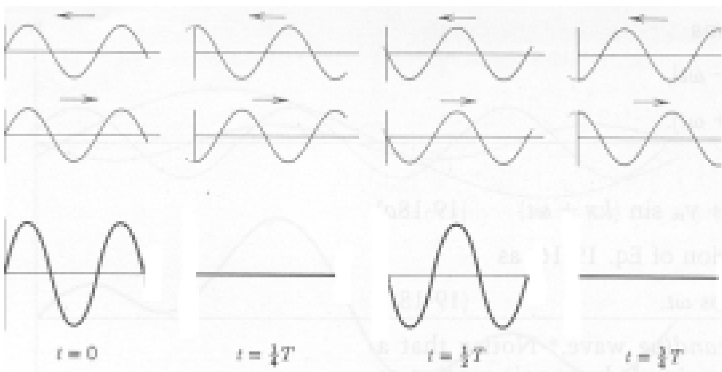
Schallwellen sind longitudinale mechanische Wellen. Sie treten in Gasen, Flüssigkeiten und Festkörpern auf. Die für das menschliche Ohr hörbaren Wellen liegen im Frequenzbereich von 20 Hz bis 20 kHz



Die Schallausbreitung hat ihre Ursache in der Kompression (oder Dekompression) eines kleinen (Gas)volumens. Dieser Überdruck (bzw. Unterdruck) wird an die Nachbarbereiche weitergegeben. Die Schallwelle ist eine periodische Druckschwankung:
$p = p_0 \sin(kx - \omega t)$, $p =$ (Gas)druck.
Die Schallgeschwindigkeit ändert sich mit der Gastemperatur gemäß $\upsilon = \upsilon_0 \cdot \sqrt{\frac{T}{T_0}}$; dabei ist υ_0 die Schallgeschwindigkeit bei $T_0 = 273{,}15\,\text{K}$ ($\hat{=}\, 0°\text{C}$). In Luft beträgt $\upsilon_0 = 331\,\text{m/s}$.

<u>Stehende Wellen</u>

Stehende Wellen entstehen, wenn eine sich ausbreitende Welle reflektiert wird. Diese rückläufige Welle überlagert sich dann der einlaufenden:
$y_{\text{Res}} = y_1 + y_2 = y_0 \sin(kx - \omega t) + y_0 \sin(kx + \omega t) = 2y_0 \sin(kx)\cos(\omega t)$.[7]
Dies ist die Gleichung einer stehenden Welle:
Zu einem gewissen Zeitpunkt t hat die Welle die Form einer Sinus–Funktion mit der Amplitude $2y_0 \cos(\omega t)$. Die Lage der Knoten (Amplitude = 0) ändert sich mit der Zeit <u>nicht</u>!



Der Abstand zweier benachbarter Knoten beträgt $\frac{\lambda}{2}$.
An einem gewissen Ort x schwingt das dortige Teilchen harmonisch ($\cos(\omega t)$) auf und ab mit der Amplitude $2y_0 \sin(kx)$. Die Amplitude ist ortsabhängig!

[7] Auch wenn die rückläufige Welle eine andere Amplitude als die einlaufende hat, ergibt sich eine stehende Welle. I.a. ist $y_{0,2} < y_{0,1}$, da ein Teil der Wellenenergie bei der Reflexion absorbiert wird.

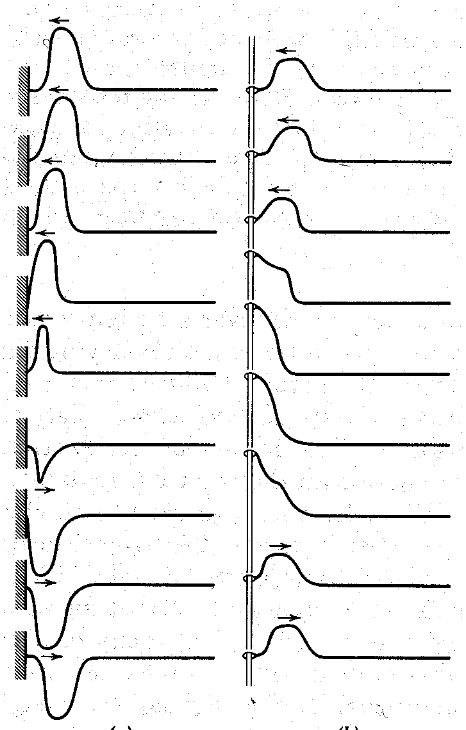
(Bei einer sich ausbreitenden Welle schwingt <u>jedes</u> Teilchen mit der Amplitude y_0!)

Es wird keine Energie transportiert: Die Energie „steht in der Welle“ und wandelt sich permanent zwischen kinetischer und potentieller Energie um.

Auch bei 2– oder 3–dimensionalen Wellen entstehen analog durch Reflexion an den Begrenzungen stehende Wellen.

Bei der Reflexion an einem festen Ende entsteht dort ein Knoten, die Welle erfährt bei der Reflexion einen Phasensprung um π. Bei der Reflexion an einem losen Ende wird Berg als Berg reflektiert. Es gibt keinen Phasensprung. Die Amplitude ist an dieser Stelle maximal.

Abbildung:

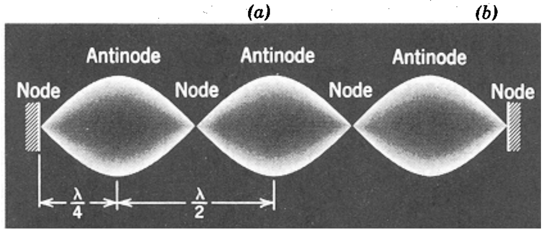


a) Reflexion eines Pulses am festen Ende,
b) Reflexion am losen Ende.

Resonanz

In einer an zwei Enden fixierten Saite (Klavier, Geige, Gitarre…) können stehende Wellen erzeugt werden, wenn an beiden Enden Knoten liegen. Die Anzahl der Knoten dazwischen ist beliebig:

$n \cdot \frac{\lambda}{2} = l$, $\quad n \in N$, $\quad l =$ Länge der Saite.



Wegen $\upsilon = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$ ($F =$ Spannung der Saite) und $\upsilon = \lambda \cdot \nu$ ergibt sich für die Eigenfrequenzen ν der Saite:

$$\boxed{\nu_n = \frac{\upsilon}{\lambda} = \frac{\sqrt{F/\mu}}{2l/n} = \frac{n}{2l}\sqrt{\frac{F}{\mu}}},\ n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Wird die Saite mit einer dieser Frequenzen angeregt, so entsteht Resonanz, d.h. die Amplitude kann sehr groß werden.

Diese Frequenzen entsprechen den „Naturtönen“ bei Instrumenten.

Wird die Saite mit einem Frequenzgemisch angeregt (wie bei Klavier, Geige, Gitarre…), so bilden sich genau die Eigenfrequenzen auf der Saite aus. Die nicht passenden Frequenzen haben verschwindende Amplitude. Das Amplitudenverhältnis der Eigenfrequenzen bestimmt die Klangfarbe des wahrgenommenen Tones.

Schallwellen:

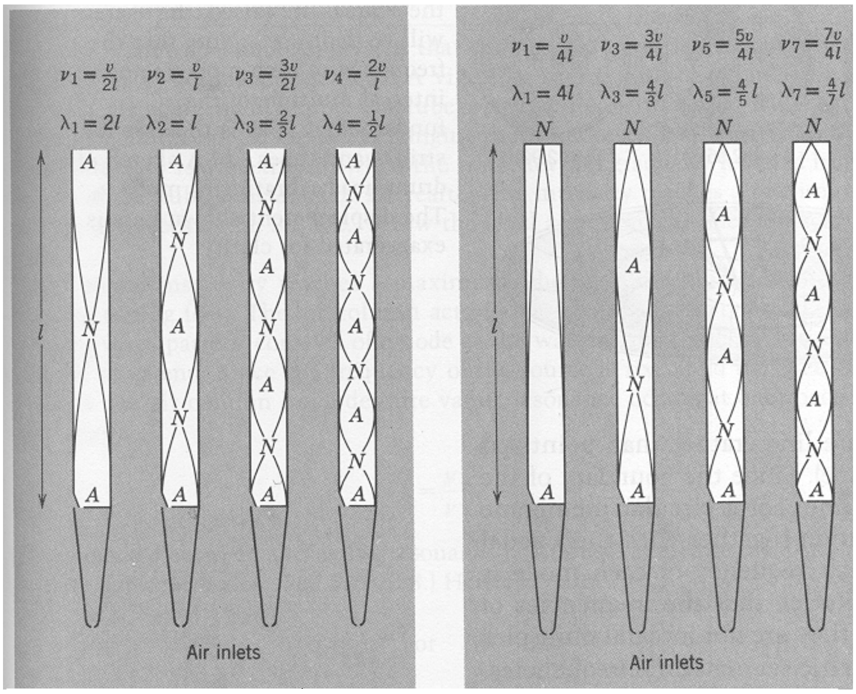
Wie bei den elastischen Wellen entstehen auch hier bei den longitudinalen Wellen stehende Wellen, wenn reflektierte Wellen mit den einlaufenden interferieren.

Für die Naturtöne einer Gassäule gegebener Länge $l = n \cdot \frac{\lambda}{2}$ gilt entsprechend:

$\upsilon = \nu_n \cdot \lambda = \nu_n \cdot \frac{2l}{n}$ oder

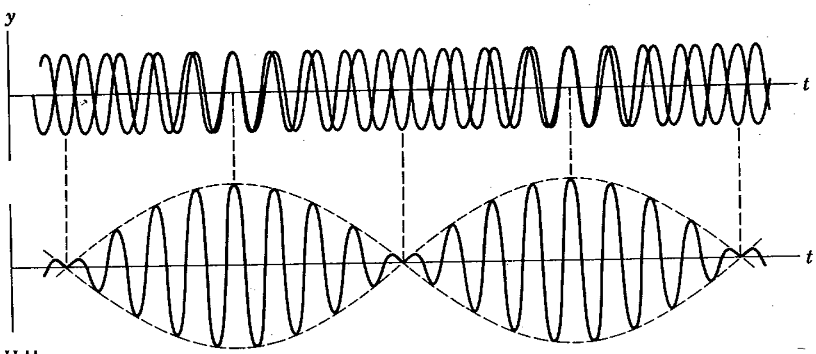
$\nu_n = \frac{n}{2l}\upsilon$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Bei einer Orgelpfeife herrscht am Gaseinlass ein Schnellebauch (Schnelle = Geschwindigkeit der vor und zurück schwingenden Gasteilchen), d.h. die Gasteilchen bewegen sich dort maximal hin und her (dies entspricht einem Druckknoten). Am anderen Ende der Pfeife herrscht bei einer offenen Pfeife ebenfalls ein Schnellebauch, bei einer gedeckten Pfeife ein Schnelleknoten ($\hat{=}$ Druckbauch). Die möglichen Naturtöne (= „Harmonische") sind in der Abbildung in a) für eine offene, in b) für eine gedeckte Pfeife dargestellt.



Schwebungen

Eine „Schwebung" entsteht, wenn sich zwei Wellen leicht unterschiedlicher Frequenz in derselben Richtung ausbreiten. Die zeitliche Interferenz zweier solcher Wellen zeigt nebenstehende Abbildung.



Für die resultierende Amplitude erhalten …

$$y_{\text{Schwebung}} = y_0 \cos(2\pi\nu_1 t) + y_0 \cos(2\pi\nu_2 t) = \left[2y_0 \cos\left(2\pi\frac{\nu_1 - \nu_2}{2}t\right)\right]\cos\left(2\pi\frac{\nu_1 + \nu_2}{2}t\right)$$ [8].

Die hörbare Frequenz entspricht also dem arithmetischen Mittel der beiden einzelnen Frequenzen:

$$\boxed{\bar{\nu} = \frac{\nu_1 + \nu_2}{2}},$$

Maximale Lautstärke ist hörbar für $\cos\left(2\pi\frac{\nu_1 - \nu_2}{2}t\right) = \pm 1$. D.h. die Frequenz der Intensitätsschwankung beträgt

$$\boxed{\nu_{\text{Schwebung}} = 2 \cdot \frac{\nu_1 - \nu_2}{2} = \nu_1 - \nu_2}.$$

[8] $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha - \beta}{2}\cos\frac{\alpha + \beta}{2}$.