Ingenieur-Mathematik II

Prof. W. Tischhauser

2003

Inhaltsverzeichnis

10 Differentialrechnung für Funktionen mit mehreren Variablen

Wir wollen nun die Differentialrechnung aus Kapitel 7 auf Funktionen mit *mehreren* Variablen ausdehnen. Im folgenden beschränken wir uns auf reellwertige Funktionen mit n reellen Variablen. (Eine Verallgemeinerung auf komplexwertige Funktionen mit mehreren komplexen Variablen ist jedoch möglich).

10.1 Der n-dimensionale Raum $\mathbb{R}^n$

Unter dem n-dimensionalen Raum $\mathbb{R}^n$ versteht man das n-fache Produkt der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen mit sich selbst:

$$\mathbb{R}^n := \underbrace{\mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}}_{n\text{-mal}} = \{x = (x_1, ..., x_n) \mid x_1, ..., x_n \text{ reell}\}$$

Die Elemente $x = (x_1, ..., x_n)$ des $\mathbb{R}^n$ werden oft als Punkte x mit den Koordinaten x_i $(i = 1, ..., n)$ oder als Vektoren x mit den Komponenten x_i $(i = 1, ..., n)$ bezeichnet. Üblicherweise werden im $\mathbb{R}^n$ die folgenden Grundoperationen der Vektoralgebra eingeführt:

a) Addition:

$$x + y = (x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) := (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$$

b) Multiplikation mit einer reellen Zahl λ :

$$\lambda x = \lambda\,(x_1, ..., x_n) := (\lambda x_1, ..., \lambda x_n)$$

c) Skalarprodukt:

$$x \cdot y = (x_1, ..., x_n) \cdot (y_1, ..., y_n) := (x_1 y_1, ..., x_n y_n)$$

Zusätzlich soll noch für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ *die Länge* $|x|$ von x eingeführt werden:

$$|x| := \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$$

Für 2 Punkte $x, y \in \mathbb{R}^n$ bezeichnet man $|x - y|$ als den *euklidischen Abstand* von x und y.

Damit gelten im $\mathbb{R}^n$ die folgenden Ungleichungen:

(i) $|x + y| \leq |x| + |y|$ Dreiecksungleichung

(ii) $|x \cdot y| \leq |x| \cdot |y|$ Schwarzsche Ungleichung

Bemerkung 10.1:

1. Für $n = 1$ wird $\mathbb{R}^1$ zur Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$.
2. Mit $d(x, y) := |x - y|$ als Metrik wird $\mathbb{R}^n$ zum n-dimensionalen *euklidischen Raum* $\mathbb{R}^n$.

10.2 Definition einer reellen Funktion mit mehreren reellen Variablen, Stetigkeit

Definition 10.2: Es seien D und W nichtleere Mengen mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $W \subseteq \mathbb{R}$ und sei $f : D \to W$. Wird dann jedem Punkt $x = (x_1, ..., x_n) \in D$ durch f genau eine (eindeutige) reelle Zahl $y \in W$ zugeordnet, so ist auf D eine reelle Funktion f mit n unabhängigen Variablen erklärt:

$$y = f(x) = f(x_1, ..., x_n)$$

■

Für die Stetigkeit gilt:

Definition 10.3: Sei f eine in $D \subseteq \mathbb{R}^n$ definierte reellwertige Funktion und $x_0 = (x_{01}, ..., x_{0n})$ ein innerer Punkt aus D. Dann heißt f *stetig in* x_0, wenn gilt

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \qquad (x = (x_1, ..., x_n))$$

Formalisierte Schreibweise:

f ist in x_0 *stetig* gdw $\forall_{\epsilon \in \mathbb{R}^+} \exists_{\delta \in \mathbb{R}^+} \forall_{x \in D} \, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Ist D' eine Teilmenge von D, so heißt f stetig in D', wenn f in jedem Punkt $x \in D'$ stetig ist.

■

10.3 Partielle Differentiation (Partielle Ableitungen)

Definition 10.4: Sei f eine reellwertige Funktion mit dem Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}^n$ (d. h. mit n Variablen) und $x = (x_1, ..., x_n)$ ein innerer Punkt aus D. Ferner existiere der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, ..., x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, ..., x_n) - f(x_1, ..., x_n)}{h} \qquad (h \in \mathbb{R})$$

Dann bezeichnet man diesen Grenzwert als *i-te partielle Ableitung* von f im Punkt x .

Schreibweisen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} f(x) &= \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, ..., x_n), \\ & f_{x_i}(x), \\ & \partial_i f(x) \end{aligned}$$

■

Vorgehen: Formal erhält man die partielle Ableitung, indem man nach der Variablen x_i (Differentiationsvariable) nach den aus Kapitel 7 bekannten Ableitungsregeln differenziert und die übrigen $n-1$ Variablen als konstant ansieht.

Beispiel 10.5

Bemerkung 10.6: Für $n > 1$ folgt aus der Existenz aller n partiellen Ableitungen einer Funktion f im Punkt x i. a. *nicht* die Stetigkeit von f im Punkt x.

Partielle Ableitungen höherer Ordnung werden formal wie bei Funktionen mit einer Veränderlichen gebildet (vergleiche Kapitel 7.4).

Hierbei können dann die sogenannten „gemischten" partiellen Ableitungen auftreten, wenn nicht nur nach derselben Variablen differenziert wird. Zur Erläuterung sei $f(x) = f(x_1, x_2)$ eine Funktion im $\mathbb{R}^2$. Dann können alle partiellen Ableitungen bis zur 3. Ordnung durch folgendes Schema verdeutlicht werden:

Schema 10.7

Für die Vertauschbarkeit partieller Ableitungen gilt der folgende Satz von Schwarz.

Satz 10.8 (Satz von Schwarz): Die Funktion f besitze in x die *stetigen* partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_i} f(x) &= f_{x_i}(x), \\
\frac{\partial}{\partial x_k} f(x) &= f_{x_k}(x) \qquad \text{und} \\
\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} f(x) &= \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} f(x)\right) = f_{x_i x_k}(x)
\end{aligned}$$

Dann existiert auch die partielle Ableitung

$$\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_i} f(x) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} f(x)\right) = f_{x_k x_i}(x)$$

und es gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} f(x) &= \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_i} f(x) \qquad \text{bzw.} \\
f_{x_i x_k}(x) &= f_{x_k x_i}(x)
\end{aligned}$$

D. h. bei einer „gemischten" partiellen Ableitung m-ter Ordnung darf die Reihenfolge der Differentiationsschritte vertauscht werden, wenn die partiellen Ableitungen m-ter Ordnung *stetige* Funktionen sind.

■

Bemerkung 10.9: Nach dem Satz von Schwarz gilt für die „gemischten" partiellen Ableitung einer Funktion $f(x) = f(x_1, x_2)$ im $\mathbb{R}^2$ (falls sie stetig sind):

$$\begin{aligned} f_{x_1x_2} &= f_{x_2x_1}, \\ f_{x_1x_1x_2} &= f_{x_1x_2x_1} = f_{x_2x_1x_1}, \\ f_{x_1x_2x_2} &= f_{x_2x_1x_2} = f_{x_2x_2x_1} \end{aligned}$$

Sind die Voraussetzungen des Satzes von Schwarz erfüllt, so reduzieren sich die 8 verschiedenen partiellen Ableitungen 3. Ordnung einer Funktion f im $\mathbb{R}^2$ auf 4 verschiedene Ableitungen:

$$f_{x_1x_1x_1}, f_{x_1x_1x_2}, f_{x_1x_2x_2}, f_{x_2x_2x_2}$$

Beispiel 10.10

10.4 Differentiation zusammengesetzter Funktionen (Ableiten von Parameterdarstellungen, verallgemeinerte Kettenregel)

Hängen die n unabhängigen Variablen $x_1, ..., x_n$ einer Funktion $f(x) = f(x_1, ..., x_n)$ im $\mathbb{R}^n$ wiederum von einem Parameter t ($t \in \mathbb{R}$) ab, so gelangen wir zu der zusammengesetzten (verketteten, mittelbaren) Funktion

$$F(t) = f(x_1(t), ..., x_n(t))$$

Für die Ableitung $F'(t)$ gilt die folgende Verallgemeinerung der Kettenregel:

Satz 10.11 (Verallgemeinerung der Kettenregel): Die Funktionen $x_1(t), ..., x_n(t)$ seien im Punkt $t = t_0$ differenzierbar. Ferner sei die Funktion $f(x_1, ..., x_n)$ in einer ε-Umgebung des Punktes $(x_1(t_0), ..., x_n(t_0))$ stetig differenzierbar.

Dann ist $F(t) = f(x_1(t), ..., x_n(t))$ im Punkt $t = t_0$ differenzierbar, und es gilt

$$F'(t_0) = \sum_{i=1}^{n} x_i'(t_o) \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1(t_0), ..., x_n(t_0))$$

■

Bemerkung 10.12:

1. Für $n = 1$ ergibt sich die Kettenregel in Kapitel 7.3.6.
2. Für die Ableitung einer Funktion nach der (Zeit) t wird oft folgende Abkürzung verwendet

   $$\frac{d}{dt}x(t) = \dot{x}(t) = \dot{x}$$

   Damit ergibt sich folgende Kurzschreibweise für die verallgemeinerte Kettenregel:

   $$\dot{F} = \sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i \cdot f_{x_i}$$

Beispiel 10.13

10.5 Extremwerte einer Funktion mit mehreren Variablen

Wir wollen uns hier auf Funktionen $f(x) = f(x_1, x_2)$ im $\mathbb{R}^2$ beschränken. Eine Verallgemeinerung des folgenden auf den $\mathbb{R}^n$ ist jedoch möglich.

Eine Funktion $f(x) = f(x_1, x_2)$ besitzt an der Stelle $x_E = (x_{E_1}, x_{E_2})$ ein relatives (lokales) $\left\{ \begin{array}{c} \text{Maximum} \\ \text{Minimum} \end{array} \right\}$, wenn in der Umgebung von x_E gilt:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x_E) = f(x_{E_1}, x_{E_2}) > f(x_1, x_2) \\ f(x_E) = f(x_{E_1}, x_{E_2}) < f(x_1, x_2) \end{array} \right\} \qquad (x_E \neq x)$$

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für einen relativen Extremwert werden im folgenden Satz formuliert.

Satz 10.14:

1. *Notwendig* für einen *Extremwert* x_E ist das Vorhandensein einer zur x_1, x_2-Ebene parallelen Tangentialebene an der Stelle $x_E = (x_{E_1}, x_{E_2})$, d. h. es muss gelten:
$$f_{x_1}(x_E) = 0 \qquad \text{und} \qquad f_{x_2}(x_E) = 0$$
d. h. die partiellen Ableitungen 1. Ordnung müssen gleich null sein.

2. *Hinreichend* für einen *Extremwert* x_E ist, dass die partiellen Ableitungen 2. Ordnung der folgenden Ungleichung genügen:
$$f_{x_1x_1}(x_E) \cdot f_{x_2x_2}(x_E) - f^2_{x_1x_2}(x_E) > 0$$
Für $f_{x_1x_1}(x_E) < 0$ (bzw. $f_{x_2x_2}(x_E) < 0$) liegt ein relatives Maximum, für $f_{x_1x_1}(x_E) > 0$ (bzw. $f_{x_2x_2}(x_E) > 0$) liegt ein relatives Minimum vor.

■

Bemerkung 10.15: $D := f_{x_1x_1}(x_E) \cdot f_{x_2x_2}(x_E) - f^2_{x_1x_2}(x_E)$ heißt *Diskriminante* von $f(x_1, x_2)$ im Punkt $x_E = (x_{E_1}, x_{E_2})$ und kann auch als zweireihige Determinante geschrieben werden:

$$D = \begin{vmatrix} f_{x_1x_1}(x_E) & f_{x_1x_2}(x_E) \\ f_{x_1x_2}(x_E) & f_{x_2x_2}(x_E) \end{vmatrix}$$

Für $D < 0$ liegt kein Extremwert, sondern ein Sattelpunkt vor. Für $D = 0$ ist keine Aussage möglich.

Beispiel 10.16

Bis jetzt waren die Variablen x_1 und x_2 unabhängig voneinander. Sind sie jedoch durch eine sogenannte Nebenbedingung miteinander verbunden (z. B. durch die implizite Gleichung $\varphi(x_1, x_2) = 0$), so gelangt man zu *Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen.* Hier sind zwei Vorgehensweisen möglich:

1. Man löst die Nebenbedingung nach einer Variablen auf, z. B. nach x_2 und setzt dies in die ursprüngliche Funktion $f(x_1, x_2)$ ein. Damit wird das Problem auf die Bestimmung der Extremwerte einer Funktion mit *einer* Variablen zurückgeführt (siehe Kapitel 7.9).

2. Ist 1. nicht möglich oder sehr aufwendig, so kann zur Lösung der Extremwertaufgabe mit Nebenbedingungen das *Lagrangesche Multiplikatorenverfahren* herangezogen werden (siehe Literatur).

Bemerkung 10.17: Prinzipiell ist es möglich, alle Sätze der Differentialrechnung für Funktionen mit *einer* Variablen auf Funktionen mit *mehreren* Variablen zu übertragen, z. B. die Taylorsche Formel oder der Mittelwertsatz. Jedoch ist diese Verallgemeinerung zum Teil recht aufwendig und würde den Rahmen dieser Vorlesung sprengen. Deshalb wird an dieser Stelle auf die weiterführende Literatur verwiesen.

11 Integralrechnung für Funktionen mit mehreren Variablen

11.1 Gebietsintegrale

Mit Hilfe der sogenannten Gebietsintegrale kann man Funktionen mit mehreren Variablen in der folgenden beschriebenen Weise integrieren.

Auf die allgemeine Definition der n-dimensionalen Gebietsintegrale wird hier verzichtet. Dafür wird auf die in der Praxis wichtigeren zwei- und dreidimensionalen Gebietsintegrale eingegangen. Die Lösung von n-dimensionalen Gebietsintegralen wird prinzipiell auf n einfache Integrationen (vergleiche Kapitel 8) zurückgeführt.

Desweiteren kann sich die Berechnung von Gebietsintegralen durch die Verwendung geeigneter Koordinatensysteme (Polarkoordinaten, Zylinderkoordinaten) vereinfachen.

Behandeln wir zunächst das anschauliche zweidimensionale Gebietsintegral.

11.1.1 Das zweidimensionale Gebietsintegral

Sei $f(x) = f(x_1, x_2)$ eine stetige Funktion im $\mathbb{R}^2$ mit dem Definitionsbereich A. Desweiteren sei $f(x_1, x_2) \geq 0$.

Skizze 11.1

Definition 11.2: Der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(x_{1k}, x_{2k}\right) \cdot \triangle A_k$$

wird, falls er existiert, als *zweidimensionales Gebietsintegral* bezeichnet.

Schreibweisen:

$$\int_A f\left(x_1, x_2\right) dA,$$

$$\int_A\int f\left(x_1, x_2\right) dA,$$

$$\int_A\int f\left(x_1, x_2\right) dx_1 dx_2$$

Weitere Namen: Doppelintegral, Bereichsintegral, Flächenintegral.

■

Bemerkung 11.2: Der obige Grenzwert existiert, falls die Funktion $f\left(x_1, x_2\right)$ im (abgeschlossenen) Integrationsbereich A *stetig* ist.

Sei nun der Integrationsbereich A ein einfaches zusammenhängendes Gebiet (ohne Löcher) mit stetiger Randkurve der folgenden Form:

Skizze 11.3

Berechnung des zweidimensionalen Gebietsintegrals:

Die Berechnung des zweidimensionalen Gebietsintegrals

$$\int_A f\left(x_1, x_2\right) dA$$

erfolgt durch zwei nacheinander auszuführenden gewöhnlichen Integrationen:

$$\int_A f\left(x_1, x_2\right) dA = \underbrace{\int_{x_1=a}^{b} \left[\underbrace{\int_{x_2=\varphi_1(x_1)}^{\varphi_2(x_1)} f\left(x_1, x_2\right) dx_2}_{\substack{\text{innere Integration (nach } x_2\text{)} \\ x_1 \text{ wird als konstant betrachtet}}} \right] dx_1}_{\text{äußere Integration (nach } x_1\text{)}}$$

1. Schritt: Innere Integration (nach der Variablen x_2)
2. Schritt: Äußere Integration (nach der Variablen x_1)

■

Bemerkung 11.4: Die Integrationsreihenfolge ist vertauschbar, wenn alle *Integrationsgrenzen konstant* sind, wenn also ein rechteckiger Integrationsbereich A vorliegt:

Skizze 11.5

Beispiel 11.6

11.1.2 Das dreidimensionale Gebietsintegral

Die Definition des zweidimensionalen Gebietsintegrals lässt sich direkt auf das dreidimensionale (und damit natürlich auf das n-dimensionale) Gebietsintegral übertragen.

Definition 11.7: Der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(x_{1k}, x_{2k}, x_{3k}\right) \cdot \triangle V_k$$

wird, falls er existiert, als *dreidimensionales Gebietsintegral* bezeichnet.

Schreibweisen:

$$\int_V f\left(x_1, x_2, x_3\right) dV,$$

$$\iiint_V f\left(x_1, x_2, x_3\right) dV,$$

$$\iiint_V f\left(x_1, x_2, x_3\right) dx_1 dx_2 dx_3$$

Dabei ist $f(x) = f\left(x_1, x_2, x_3\right)$ eine stetige Funktion im $\mathbb{R}^3$ mit dem Definitionsbereich V. Die $\triangle V_k$ sind die n Teilbereiche, in die V zerlegt wird.

Weitere Namen: Dreifachintegral, Raumintegral.

■

Berechnung des dreidimensionalen Gebietsintegrals: Die Berechnung des dreidimensionalen Gebietsintegrals

$$\int_V f\left(x_1, x_2, x_3\right) dV$$

erfolgt durch drei nacheinander auszuführenden gewöhnlichen Integrationen:

$$\int_V f\left(x_1, x_2, x_3\right) dV = \int_{x_1=a}^{b} \int_{x_2=\varphi_1(x_1)}^{\varphi_2(x_1)} \int_{x_3=\psi_1(x_1,x_2)}^{\psi_2(x_1,x_2)} f\left(x_1, x_2, x_3\right) dx_3 dx_2 dx_1$$

Die drei Integrationsschritte erfolgen von innen nach außen.

Dabei ist V ein zylindrischer Integrationsbereich.

■

Bemerkung 11.8: Auch hier kann die Integrationsreihenfolge vertauscht werden, wenn *alle Integrationsgrenzen konstant* sind.

Beispiel 11.9

12 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Unter einer *Differentialgleichung* versteht man eine Gleichung, die außer den unabhängigen Variablen und den unbekannten Funktionen dieser Variablen auch noch die Ableitungen der unbekannten Funktionen enthält.

Hängen die unbekannten Funktionen nur von einer unabhängigen Variablen ab, so heißt die Differentialgleichung *gewöhnliche Differentialgleichung.* Treten dagegen zwei oder mehr unabhängige Variable auf, so heißt die Differentialgleichung *partielle Differentialgleichung*, da hier partielle Ableitungen erscheinen.

In diesem Kapitel werden nur gewöhnliche Differentialgleichungen behandelt (Differentialgleichung steht dann immer für gewöhnliche Differentialgleichung).

Definition 12.1: Eine Gleichung, in der Ableitungen einer unbekannten Funktion $y = y(x)$ bis zur n-ten Ordnung auftreten, heißt *gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung.* Darstellung der gewöhnlichen Differentialgleichung n-ter Ordnung in *impliziter Form*:

$$F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0 \qquad (y = y(x))$$

und in *expliziter Form*:

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}\right)$$

■

Beispiele 12.2

Definition 12.3: Eine Funktion $y = y(x)$ heißt eine *Lösung* (Lösungsfunktion, Integral), wenn sie nebst ihren Ableitungen die Differentialgleichung erfüllt, d. h. wenn gilt

$$F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0$$

■

Man unterscheidet folgende Typen von Lösungen einer Differentialgleichung n-ter Ordnung:

1. *Allgemeine Lösung*: Sie enthält n voneinander unabhängige Parameter.

2. *Partikuläre (spezielle) Lösungen*: Sie gehen aus der allgemeinen Lösung durch eine spezielle Wahl der n Parameter hervor, z. B. durch zusätzliche Anfangs- oder Randbedingungen.

3. *Singuläre Lösungen* sind Lösungen, die nicht in 1. enthalten sind, bzw. nicht aus der allgemeinen Lösung gewonnen werden können.

4. *Zusammengesetzte Lösungen* bestehen aus verschiedenen partikulären und singulären Lösungen.

Beispiel 12.4

Allgemein gilt folgender Satz.

Satz 12.5: Die allgemeine Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung n-ter Ordnung stellt geometrisch eine n-parametrige Kurvenschar dar. Umgekehrt kann jede n-parametrige Kurvenschar durch eine Differentialgleichung n-ter Ordnung beschrieben werden.

■

Anfangs- und Randwertprobleme:

Die allgemeine Lösung einer Differentialgleichung n-ter Ordnung enthält n unabhängige, unbestimmte Parameter.Um sie zu bestimmen, benötigt man noch n zusätzliche Bedingungen. Man unterscheidet hier Anfangs- und Randbedingungen.

Bei einem *Anfangswertproblem* werden der Lösungsfunktion $y = y(x)$ n zusätzliche Werte an einer Stelle x_0 vorgeschrieben, nämlich

$$y(x_0), y'(x_0), y''(x_0), ..., y^{(n-1)}(x_0)$$

Diese zusätzlichen Werte heißen *Anfangswerte* (Anfangsbedingungen). Sie führen zu n Bestimmungsgleichungen für die Parameter $C_1, C_2, ..., C_n$.

Bei einem *Randwertproblem* werden der Lösungsfunktion $y = y(x)$ n zusätzliche Werte an n verschiedenen Stellen $x_1, x_2, ..., x_n$ vorgeschrieben, nämlich

$$y(x_1), y(x_2), ..., y(x_n)$$

Diese zusätzlichen Werte heißen *Randwerte* (Randbedingungen). Sie führen zu n Bestimmungsgleichungen für die Parameter $C_1, C_2, ..., C_n$.

12.1 Differentialgleichungen 1. Ordnung

Die Differentialgleichung 1. Ordnung ist i. a. eine Gleichung zwischen der gesuchten Funktion $y = y(x)$, deren Ableitung $y' = \dfrac{dy}{dx}$ und der unabhängigen Variablen x:

$$\begin{aligned} F(x, y, y') &= 0 \qquad \text{(implizite Form)} \\ &\text{bzw.} \\ y' &= f(x, y) \qquad \text{(explizite Form)} \end{aligned}$$

Zur Lösung von Differentialgleichungen ist zu sagen, dass es kein allgemeines Lösungsverfahren gibt (ähnlich wie bei der Integralrechnung), sondern der Lösungsweg immer vom Typ der Differentialgleichung abhängt. Bei einigen (wenigen) Differentialgleichungen ist die Lösung durch Integration möglich (vergleiche Beispiel 12.4).

12.1.1 Lösung einer Differentialgleichung 1. Ordnung durch Trennung der Variablen

Ist eine Differentialgleichung 1. Ordnung in der Form

$$y' = f(x)\,g(y) \qquad \text{(Typ A)}$$

darstellbar, so ist die Lösung mit Hilfe der Methode „Trennung (Seperation) der Variablen" möglich. Eine eindeutige Lösung existiert, wenn $f(x)$ stetig, $g(y)$ stetig differenzierbar und $g(y) \neq 0$ ist.

Verfahren 12.6 („Trennung der Variablen"): Eine Differentialgleichung 1. Ordnung vom Typ

$$y' = f(x)\,g(y) \qquad (g(y) \neq 0) \qquad \text{(Typ A)}$$

lässt sich schrittweise wie folgt lösen:

1. Trennung der beiden Variablen x und y.
2. Integration auf beiden Seiten der Gleichung.
3. Auflösung nach y (falls möglich und erwünscht).

■

Beispiel 12.7

12.1.2 Lösung einer Differentialgleichung 1. Ordnung durch Substitution

Die folgenden 2 Typen von Differentialgleichungen 1. Ordnung lassen sich durch eine lineare Substitution lösen:

$$\begin{aligned} y' &= f(ax + by + c) \qquad \text{(Typ B)} \\ y' &= f\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \text{(Typ C)} \end{aligned}$$

Verfahren 12.8 („Substitution"): Differentialgleichungen 1. Ordnung vom Typ B und Typ C können durch folgende Substitutionen schrittweise gelöst werden:

$$\text{Substitution für Typ B} \quad : \qquad u = ax + by + c$$
$$\text{Substitution für Typ C} \quad : \qquad u = \frac{y}{x}$$

1. Durchführung der Substitution.

2. Integration der neuen Differentialgleichung 1. Ordnung für die Hilfsfunktion u durch „Trennung der Variablen".

3. Rücksubstitution und Auflösung nach y.

■

Beispiele 12.9

12.1.3 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

Der folgende Satz gilt für *lineare* Differentialgleichungen n-ter Ordnung. Sie hat die Form

$$y^{(n)}(x) + f_{n-1}(x)\, y^{(n-1)}(x) + \ldots + f_0(x)\, y(x) = g(x)$$

Sie heißt *homogen*, wenn $g(x) = 0$ ist und *inhomogen*, wenn $g(x) \neq 0$ ist.

Die Funktion $g(x)$ wird mitunter auch als Störfunktion bezeichnet. Für die Lösungsmenge einer inhomogenen linearen Differentialgleichung gilt der folgende Satz.

Satz 12.10: Die allgemeine Lösung y_A einer inhomogenen linearen Differentialgleichung (n-ter Ordnung) ist als Summe

- der allgemeinen Lösung y_H der zugehörigen homogenen linearen Differentialgleichung

- und einer (beliebigen) partikulären Lösung y_P der inhomogenen linearen Differentialgleichung

darstellbar:

$$y_A = y_H + y_P$$

■

Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung lassen sich stets lösen, und zwar durch die Methode von Lagrange. Sie besteht aus 3 Schritten:

Satz 12.11: Eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung der Form

$$y' + f(x) \cdot y = g(x) \qquad (y = y(x))$$

lässt sich durch die folgenden 3 Schritte lösen:

1. Bestimmung der allgemeinen Lösung y_H der zugehörigen homogenen Gleichung

   $$y' + f(x) \cdot y = 0$$

   durch „Trennung der Variablen".

2. Bestimmung einer partikulären Lösung y_P der inhomogenen Gleichung

   $$y' + f(x) \cdot y = g(x)$$

   durch „Variation der Konstanten".

3. Bestimmung der allgemeinen Lösung y_A der inhomogenen Gleichung durch Addition von y_H und y_P :

   $$y_A = y_H + y_P$$

■

Beispiel 12.12

Bemerkung 12.13: Die partikuläre Lösung y_P der inhomogenen linearen Differentialgleichung (n-ter Ordnung) lässt sich immer durch die Methode der „Variation der Konstanten" bestimmen. Man kann jedoch auch versuchen, eine partikuläre Lösung durch einen geeigneten Ansatz einer Lösungsfunktion y (evtl. durch Erraten) zu finden.

12.1.4 Bernoullische Differentialgleichungen

Differentialgleichungen der Form

$$y' + f(x) \cdot y = g(x) \cdot y^n \qquad (n \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\})$$

heißen *Bernoullische Differentialgleichungen.* Sie können Mit Hilfe der *Substitution*

$$y^{1-n} = z \qquad \text{für jedes } n \neq 1$$

auf lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung zurückgeführt werden.

Bemerkung 12.14:

1. Für $n = 0$ ergibt sich die inhomogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung:

$$y' + f(x) \cdot y = g(x)$$

   Die Lösung ergibt sich aus Satz 12.11.

2. Für $n = 1$ ergibt sich die homogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung:

$$\begin{aligned} y' + [f(x) - g(x)] \cdot y &= 0 \\ &\text{bzw.} \\ y' + h(x) \cdot y &= 0 \qquad \text{mit } h(x) = f(x) - g(x) \end{aligned}$$

   Die Lösung ergibt durch „Trennung der Variablen".

Beispiel 12.15

12.2 Differentialgleichungen 2. Ordnung

Eine Differentialgleichung 2. Ordnung hat folgende allgemeine Darstellung:

$$\begin{aligned} F(x, y, y', y'') &= 0 \qquad \text{(implizite Form)} \\ &\text{bzw.} \\ y'' &= f(x, y, y') \qquad \text{(explizite Form)} \end{aligned}$$

12.2.1 Einfache Differentialgleichungen 2. Ordnung (Integrable Typen)

Besitzt die Differentialgleichung 2. Ordnung die Form

$$y'' = f(x) \qquad \text{(Typ A)}$$

,so führt zweimaliges Integrieren auf beiden Seiten zur allgemeinen Lösung.

Für die Formen

$$\begin{aligned} y'' &= f(y) && \text{(Typ B)} \\ y'' &= f(y') && \text{(Typ C)} \\ y'' &= f(x, y') && \text{(Typ D)} \\ y'' &= f(y, y') && \text{(Typ E)} \end{aligned}$$

führt die Substitution

$$y' = p$$

auf eine Differentialgleichung 1. Ordnung (Reduktion der Ordnung).

Wird p also als eine Funktion von y angesehen, die über y von x abhängt, so liefert die Kettenregel:

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot p$$

Beispiel 12.16

12.2.2 Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Eine *lineare* Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten hat die allgemeine Form:

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + ... + a_0 y(x) = g(x) \qquad (a_i \in \mathbb{R})$$

Für $g(x) = 0$ heißt die Differentialgleichung *homogen*, für $g(x) \neq 0$ heißt die Differentialgleichung *inhomogen*.

Die Funktion $g(x)$ wird auch als Störfunktion oder Störglied bezeichnet.

Die linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten spielen in den naturwissenschaftlichen und technischen Anwendungen eine besonders wichtige Rolle. Wir können uns hier daher auf Differentialgleichungen 2. Ordnung beschränken, eine Verallgemeinerung des folgenden auf Differentialgleichungen n-ter Ordnung ist jedoch ohne Schwierigkeiten möglich.

Eine *lineare* Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten kann stets auf die folgende Form gebracht werden:

$$y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = g(x) \qquad (a_i \in \mathbb{R})$$

Beispiele 12.17

Eigenschaften einer homogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

Die *homogene* lineare Differentialgleichung 2.Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0 \qquad (a_i \in \mathbb{R})$$

hat die folgenden *Eigenschaften:*

1. Ist $y_1(x)$ eine Lösung der Differentialgleichung, so ist auch

   $$y(x) = C y_1(x) \qquad (C \in \mathbb{R} \text{ beliebige Konstante})$$

   eine Lösung der Differentialgleichung.

2. Sind $y_1(x)$ und $y_2(x)$ zwei Lösungen der Differentialgleichung, so ist auch die Linearkombination

   $$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \qquad (C_1, C_2 \in \mathbb{R} \text{ beliebige Konstanten})$$

   eine Lösung der Differentialgleichung.

3. Ist $y(x) = u(x) + jv(x)$ eine komplexe Lösung der Differentialgleichung, so sind auch $u(x)$ und $v(x)$ (reelle) Lösungen der Differentialgleichung.

Über die *Lösungsmenge* einer homogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten lässt sich folgendes sagen:

Satz 12.18: Die allgemeine Lösung $y = y(x)$ einer homogenen linearen Differentialgleichung 2-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0 \qquad (a_i \in \mathbb{R})$$

ist als Linearkombination zweier *linear unabhängiger Lösungen* (Basislösungen) $y_1 = y_1(x)$ und $y_2 = y_2(x)$ darstellbar:

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \qquad (C_1, C_2 \in \mathbb{R} \text{ beliebige Konstanten})$$

Dabei sind y_1 und y_2 genau dann Basislösungen, wenn ihre *Wronski-Determinante* W ungleich null ist, d. h. wenn gilt:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

■

Bemerkung 12.19:

1. Es genügt zu zeigen, dass die Wronski-Determinante W an *einer Stelle* x_0 ungleich 0 ist.

2. Die beiden Basislösungen y_1 und y_2 bilden ein sogenanntes *Fundamentalsystem* der Differentialgleichung.

Beispiel 12.20

Lösung einer *homogenen* linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

Satz 12.21: Bei der *homogenen* linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \qquad (a_i \in \mathbb{R})$$

führt der *Lösungsansatz*

$$y = e^{\lambda x} \qquad (\lambda \in \mathbb{C})$$

zu einem Fundamentalsystem der Differentialgleichung (zu den beiden Basislösungen $y_1(x)$ und $y_2(x)$). Die beiden Basislösungen $y_1(x)$ und $y_2(x)$ hängen von der Art der Lösungen λ_1 und λ_2 der zugehörigen *charakteristischen Gleichung*

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

wie folgt ab:

1. Fall: $\lambda_1 \neq \lambda_2$ mit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ (reell)

   Fundamentalsystem: $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ und $y_2 = e^{\lambda_2 x}$
   Allgemeine Lösung: $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$

2. Fall: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ mit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda \in \mathbb{R}$ (reell)

Fundamentalsystem: $y_1 = e^{\lambda x}$ und $y_2 = xe^{\lambda x}$
Allgemeine Lösung: $y = (C_1 x + C_2)e^{\lambda x}$

3. Fall: $\lambda_1 = \sigma + j\omega, \lambda_2 = \sigma - j\omega$ mit $\sigma, \omega \in \mathbb{R}$ (λ_1, λ_2 sind konjugiert komplex)

Fundamentalsystem: $y_1 = e^{\sigma x} \sin \omega x$ und $y_2 = e^{\sigma x} \cos \omega x$
Allgemeine Lösung: $y = e^{\sigma x}(C_1 \sin \omega x + C_2 \cos \omega x)$

■

Beispiel 12.22

Lösung einer *inhomogenen* linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

Die *inhomogene* lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten besitzt die Form:

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = g(x) \qquad \text{mit } g(x) \neq 0,\ g(x) \text{ Störfunktion } (a_i \in \mathbb{R})$$

Für die Lösungsmenge dieser Differentialgleichung gilt der Satz 12.10. Er wird hier auf diesen Fall übertragen.

Satz 12.23: Die *allgemeine Lösung* y_A einer inhomogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten ist als Summe (Überlagerung)

- der allgemeinen Lösung y_H der zugehörigen homogenen linearen Differentialgleichung
$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$
- und einer (beliebigen) partikulären Lösung y_P der inhomogenen linearen Differentialgleichung
$$y'' + a_1 y' + a_0 y = g(x)$$

darstellbar:

$$y_A = y_H + y_P$$

■

Grundsätzlich gilt nun:

Kennt man die allgemeine Lösung y_H der homogenen Differentialgleichung, so lässt sich stets eine partikuläre Lösung y_P der inhomogenen Differentialgleichung mit der Methode „Variation der Konstanten" ermitteln. Dies gilt auch für lineare Differentialgleichungen der Form

$$y'' + \varphi_1(x)\, y' + \varphi_0(x)\, y = g(x)$$

Für Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten kann man sich aber in vielen Fällen die „Variation der Konstanten" ersparen, indem man einen geeigneten Ansatz für die partikuläre Lösung vornimmt. Dieser Ansatz soll der Struktur der Störfunktion $g(x)$ angepasst sein. Wichtige Ansätze für häufig auftretende Störfunktionen $g(x)$ werden in einer folgenden Tabelle zusammengestellt.

Tabelle 12.24: Lösungsansätze für eine partikuläre Lösung y_P einer inhomogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

Störfunktion $g(x) = ...$	Lösungsansatz $y_P(x) = ...$
$b_0 + b_1 x + ... + b_n x^n$ (Polynom n-ten Grades)	$B_0 + B_1 x + ... + B_n x^n$ (es darf keine x-Potenz ausgelassen werden, auch wenn $g(x)$ nicht alle Potenzen bis zur n-ten Potenz enthält)
$ke^{\alpha x}$	$Ke^{\alpha x}$ (α ist keine Lösung der charakteristischen Gleichung)
$k \sin \alpha x$ oder $k \cos \alpha x$ oder $k_1 \sin \alpha x + k_2 \cos \alpha x$	$K_1 \sin \alpha x + K_2 \cos \alpha x$ ($j\alpha$ ist keine Lösung der charakteristischen Gleichung) (der Ansatz muss stets $\sin \alpha x$ als auch $\cos \alpha x$ enthalten, auch wenn $g(x)$ nur aus einer der beiden Funktionen besteht)
$k \sinh \alpha x$ oder $k \cosh \alpha x$ oder $k_1 \sinh \alpha x + k_2 \cosh \alpha x$	$K_1 \sinh \alpha x + K_2 \cosh \alpha x$ ($j\alpha$ ist keine Lösung der charakteristischen Gleichung) (der Ansatz muss stets $\sinh \alpha x$ als auch $\cosh \alpha x$ enthalten, auch wenn $g(x)$ nur aus einer der beiden Funktionen besteht)
$ke^{\beta x} \sin \alpha x$ oder $ke^{\beta x} \cos \alpha x$	$e^{\beta x}(K_1 \sin \alpha x + K_2 \cos \alpha x)$

Bemerkung 12.25

Beispiel 12.26

12.3 Systeme linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Zwei gekoppelte lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten der Form

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + g_1(x) \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + g_2(x) \end{aligned}$$

bilden ein lineares Differentialgleichungssystem 2. Ordnung (unter einer Ordnung eines Differentialgleichungssystems versteht man die Summe der Ordnungen der einzelnen Differentialgleichungen).

Das lineare Differentialgleichungssystem 2. Ordnung lässt sich auch wie folgt darstellen:

$$\overrightarrow{y'} = A\overrightarrow{y} + \overrightarrow{g}$$

mit $\overrightarrow{y'} = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix}$ Ableitung des Lösungsvektors

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ Koeffizientenmatrix, $a_{ik} \in \mathbb{R} \quad (i,k = 1,2)$

$\overrightarrow{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ Lösungsvektor

$\overrightarrow{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$ Störvektor

Dabei handelt es sich um ein *homogenes* System, wenn

$$\overrightarrow{g} = \overrightarrow{0} \qquad \text{also } g_1(x) = 0 \text{ und } g_2(x) = 0$$

12.3.1 Lösung eines *homogenen* linearen Differentialgleichungssystems 2. Ordnung

Satz 12.27: Ein *homogenes* lineares Differentialgleichungssystem 2. Ordnung der Form

$$\overrightarrow{y'} = A\overrightarrow{y}$$

lässt sich stets durch den Ansatz

$$\overrightarrow{y} = \overrightarrow{K}e^{\lambda x} \qquad \text{mit } \overrightarrow{K} = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix}$$

lösen.

Die Werte des Parameters λ werden mit Hilfe der *charakteristischen Gleichung*

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

berechnet. Dabei werden 3 Fälle unterschieden:

1. Fall: $\lambda_1 \neq \lambda_2$ mit $\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{R}$ (reell)

   Für die erste Lösungsfunktion y_1 gilt dann

$$y_1 = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

2. Fall: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ mit $\lambda_1,\lambda_2,\lambda \in \mathbb{R}$ (reell)

   Für die erste Lösungsfunktion y_1 gilt dann

$$y_1 = (C_1 x + C_2) e^{\lambda x}$$

3. Fall: $\lambda_1 = \sigma + j\omega, \lambda_2 = \sigma - j\omega$ mit $\sigma, \omega \in \mathbb{R}$ (λ_1,λ_2 sind konjugiert komplex)

   Für die erste Lösungsfunktion y_1 gilt dann

$$y_1 = e^{\sigma x}(C_1 \sin \omega x + C_2 \cos \omega x)$$

Die zweite Lösungsfunktion y_2 wird in allen 3 Fällen direkt aus dem Differentialgleichungssystem $\overrightarrow{y'} = A\overrightarrow{y}$ ermittelt, und zwar durch Einsetzen von y_1 und y_1'.
■

Beispiel 12.28

12.3.2 Lösung eines *inhomogenen* linearen Differentialgleichungssystems 2. Ordnung

Wir können den Satz 12.23 direkt übertragen.

Satz 12.29: Die *allgemeine Lösung* $\overrightarrow{y_A} = \begin{pmatrix} y_{1A} \\ y_{2A} \end{pmatrix}$ des inhomogenen linearen Differentialgleichungssystems 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$\overrightarrow{y'} = A\overrightarrow{y} + \overrightarrow{g}$$

mit $\overrightarrow{y'} = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix}$ Ableitung des Lösungsvektors

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ Koeffizientenmatrix, $a_{ik} \in \mathbb{R} \quad (i, k = 1, 2)$

$\overrightarrow{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ Lösungsvektor

$\overrightarrow{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$ Störvektor

ist als Summe (Überlagerung)

- der allgemeinen Lösung $\overrightarrow{y_H} = \begin{pmatrix} y_{1H} \\ y_{2H} \end{pmatrix}$ des zugehörigen homogenen linearen Differentialgleichungssystems

$$\overrightarrow{y'} = A\overrightarrow{y}$$

- und einer (beliebigen) partikulären Lösung $\overrightarrow{y_P} = \begin{pmatrix} y_{1P} \\ y_{2P} \end{pmatrix}$ des inhomogenen linearen Differentialgleichungssystems

$$\overrightarrow{y'} = A\overrightarrow{y} + \overrightarrow{g}$$

  darstellbar:

$$\overrightarrow{y_A} = \overrightarrow{y_H} + \overrightarrow{y_P}$$

■

Bemerkung 12.30: In dem Lösungsansatz für die partikuläre Lösung $\overrightarrow{y_P}$ müssen in y_{1P} und y_{2P} jeweils beide Störfunktionen entsprechend der Tabelle 12.24 berücksichtigt werden.

Beispiel 12.31

12.4 Numerische Lösung von Differentialgleichungen

In diesem Kapitel soll das folgende *Anfangswertproblem* exemplarisch numerisch gelöst werden:

$$\boxed{\begin{array}{ll} y' = f(x,y) & \text{(Differentialgleichung)} \\ y(x_0) = y_0 & \text{(Anfangswert)} \end{array}}$$

Unter den (vielen) numerischen Verfahren wird hier das *Runge-Kutta-Verfahren* ausgewählt, das sich in der Praxis als ein Rechenverfahren hoher Genauigkeit gezeigt hat.

Differentialgleichungen höherer Ordnung können durch passende Substitutionen in Differentialgleichungen 1. Ordnung übergeführt werden (Reduktion der Ordnung, vergl. Kap. 12.2).

Wir setzen mit der Schrittweite h :

x_0
$x_1 = x_0 + h$
$x_2 = x_1 + h$
.
.
.

(Die Schrittweite ist hier immer gleich, sie kann jedoch auch variieren.)

und bezeichnen mit

$y(x_n)$: exakte Lösung an der Stelle x_n
y_n : theoretischer Näherungswert für $y(x_n)$ $\qquad n = 0, 1, 2, ...$
$\widetilde{y_n}$: numerisch erzielter Wert für y_n

Die Grundidee besteht darin, die exakte Lösungskurve y in jedem Teilintervall durch eine Gerade zu ersetzen.

Skizze 12.32

Satz 12.33 (Runge-Kutta-Verfahren): Beim *Runge-Kutta-Verfahren* werden die Näherungswerte y_n wie folgt ermittelt

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)$$

mit

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n, y_n) \\ k_2 &= hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}) && h\text{: Schrittweite} \\ k_3 &= hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}) && n = 0, 1, 2, 3, \ldots \\ k_4 &= hf(x_n + h, y_n + k_3) \end{aligned}$$

Es ist ein Verfahren 4. Ordnung, d. h. es gilt für den Fehler e_n :

$$e_n = y_n - y(x_n) = O(h^4)$$

■

Bemerkung 12.34

Rechenschema für das Runge-Kutta-Verfahren 12.35:

Es sei $K = \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)$

n	x	y	$f(x,y)$	$k = hf(x,y)$
0	x_0 $x_0 + \frac{h}{2}$ $x_0 + \frac{h}{2}$ $x_0 + h = x_1$	y_0 $y_0 + \frac{k_1}{2}$ $y_0 + \frac{k_2}{2}$ $y_0 + k_3$	$f(x_0, y_0)$ $f(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2})$ $f(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2})$ $f(x_0 + h, y_0 + k_3)$	$k_1 = hf(x_0, y_0)$ $k_2 = hf(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2})$ $k_3 = hf(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2})$ $k_4 = hf(x_0 + h, y_0 + k_3)$
		$y_1 = y_0 + K$		$K = \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)$
1 .	x_1 .	y_1 .	$f(x_1, y_1)$.	$k_1 = hf(x_1, y_1)$.
.	.	.	.	.

Beispiel 12.36: Für das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y' &= y + e^x \\ y(0) &= 1 \qquad \text{(Anfangswert)} \end{aligned}$$

soll im Intervall $0 \leq x \leq 0,2$ eine Näherungslösung nach dem Runge-Kutta-Verfahren ermittelt werden. Die Schrittweite h sei $h = 0,05$.

Damit ist

$x_0 = 0$

$x_1 = x_0 + h = 0,05$

$x_2 = x_1 + h = 0,1$

usw.

n	x	y	$f(x,y) = y + e^x$	$k = hf(x,y)$
0	$x_0 = 0$	$y_0 = y(0) = 1$	$f(x_0, y_0)$ $= f(0,1) = 2$	$k_1 = hf(x_0, y_0)$ $= hf(0,1) = 0.05 \cdot 2 = 0.1$
	$x_0 + \frac{h}{2}$ $= 0 + 0.025$ $= 0.025$	$y_0 + \frac{k_1}{2}$ $= 1 + 0.05$ $= 1.05$	$f(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2})$ $= f(0.025, 1.05)$ $= 2.0753151$	$k_2 = hf(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2})$ $= hf(0.025, 1.05)$ $= 0.05 \cdot 2.0753151$ $= 0.1037658$
	$x_0 + \frac{h}{2}$ $= 0.025$	$y_0 + \frac{k_2}{2}$ $= 1 + 0.1037658$ $= 1.0518829$	$f(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2})$ $= f(0.025, 1.0518829)$ $= 2.077198$	$k_3 = hf(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2})$ $= hf(0.025, 1.0518829)$ $= 0.1038599$
	$x_0 + h = x_1$ $= 0.05$	$y_0 + k_3$ $= 1.1038599$	$f(x_0 + h, y_0 + k_3)$ $= f(0.05, 1.1038599)$ $= 2.155131$	$k_4 = hf(x_0 + h, y_0 + k_3)$ $= hf(0.05, 1.1038599)$ $= 0.1077565$
				$K = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$ $= 0.1038347$
		$y_1 = y_0 + K$ $= 1 + 0.1038347$ $= 1.1038347$		
1	x_1 $= 0.05$.	y_1 $= 1.1038347$.	$f(x_1, y_1)$ $= f(0.05, 1.1038347)$.	$k_1 = hf(x_1, y_1)$ $= hf(0.05, 1.1038347)$.

Das Anfangswertproblem besitzt die exakte Lösung

$$y = (x + 1)e^x$$

Ein Vergleich zeigt die sehr guten Näherungen des Runge-Kutta-Verfahrens (bei 6 Stellen nach dem Dezimalpunkt sogar Übereinstimmung).

x	Runge-Kutta	exakte Lösung
$x_0 = 0$	$y_0 = 1$	$y(x_0) = y(0) = 1$
$x_1 = 0.05$	$y_1 = 1.103834$	$y(x_1) = 1.103834651$
$x_2 = 0.10$	$y_2 = 1.215688$	$y(x_2) = 1.21568801$
$x_3 = 0.15$	$y_3 = 1.336109$	$y(x_3) = 1.336109379$
$x_4 = 0.20$	$y_4 = 1.465683$	$y(x_4) = 1.46568331$

■

13 Differenzen und Differenzengleichungen

13.1 Differenzen

Definition 13.1: Sei $y = y(x)$ eine Funktion mit dem Definitionsbereich D und $h \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante. Dann ist der *Differenzenoperator* Δ wie folgt definiert:

$$\Delta y(x) := y(x+h) - y(x)$$

■

Skizze 13.2

Bemerkung 13.3: Wendet man auf $\Delta y(x)$ wieder den Differenzenoperator Δ an, so erhält man

$$\begin{aligned} \Delta[\Delta y(x)] &= \Delta[y(x+h) - y(x)] = \Delta[y(x+h)] - \Delta y(x) \\ &= y(x+2h) - y(x+h) - [y(x+h) - y(x)] \\ &= y(x+2h) - 2y(x+h) + y(x) \end{aligned}$$

Auf die letzte Beziehung kann man wieder den Differenzenoperator Δ anwenden, usw..

Damit lässt sich folgende Definition angeben.

Definition 13.4: Der *Differenzenoperator* Δ^n n-ter Ordnung ist wie folgt definiert:

$$\Delta^n y(x) := \Delta\left[\Delta^{n-1} y(x)\right]$$

Für $n = 2$ erhält man den *Differenzenoperator* Δ^2 zweiter Ordnung:

$$\Delta^2 y(x) := \Delta[\Delta y(x)] = y(x+2h) - 2y(x+h) + y(x)$$

Für $n = 1$ erhält man den *Differenzenoperator* Δ^1 erster Ordnung (vergl. Definition 13.1):

$$\Delta^1 y(x) := \Delta y(x) = y(x+h) - y(x)$$

Für $n = 0$ erhält man den *Differenzenoperator* Δ^0 null-ter Ordnung. Er heißt auch Identitätsoperator, da er die Funktion $y(x)$ nicht verändert:

$$\Delta^0 y(x) := y(x)$$

■

Beispiel 13.5

Der Differenzenoperator ist eng verwandt mit dem Ableitungs- oder Differentialoperator (vergl. Kapitel 7) und es ist naheliegend, die Differenzenrechnung in Analogie zur Differentialrechnung zu entwickeln. Der Hauptunterschied besteht darin, dass bei der Differenzenrechnung stets mit einer finiten Größe h gerechnet wird, während bei der Differentialrechnung $h \to 0$ betrachtet wird, was zu infinitesimalen Größen führt.

Im folgenden Satz sind allgemeine Regeln für die Differenzenrechnung zusammengestellt. Man beachte dabei die Ähnlichkeiten zu den Regeln der Differentialrechnung.

Satz 13.6 Seien $y_1 = y_1(x)$ und $y_2 = y_2(x)$ zwei Funktionen und $h \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante. Dann gelten

(i) $\Delta [y_1(x) + y_2(x)] = \Delta y_1(x) + \Delta y_2(x)$

(ii) $\Delta [C y_1(x)] = C \cdot \Delta y_1(x) \qquad$ (C beliebige Konstante)

(iii) $\Delta [y_1(x) \cdot y_2(x)] = y_1(x) \cdot \Delta y_2(x) + y_2(x+h) \cdot \Delta y_1(x)$

(iv) $\Delta \left[\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)}\right] = \dfrac{y_2(x) \cdot \Delta y_1(x) - y_1(x) \cdot \Delta y_2(x)}{y_2(x) \cdot y_2(x+h)}$

■

13.2 Gewöhnliche Differenzengleichungen

Eine *gewöhnliche Differenzengleichung* stellt eine Beziehung zwischen einer unabhängigen Variablen x, einer unbekannten Funktion $y = y(x)$ und deren Differenzen $\Delta y(x), \Delta^2 y(x), ...$ her. Bei partiellen Differenzengleichungen treten mehrere unabhängige Variable $x_1, ..., x_n$ auf.

Definition 13.7: Eine *gewöhnliche Differenzengleichung* lässt sich in impliziter Form wie folgt schreiben.

$$F\left(x, y(x), \Delta y(x), \Delta^2 y(x), ..., \Delta^n y(x)\right) = 0 \qquad \text{(Darstellung 1)}$$

bzw. mit $h \in \mathbb{R}$ als einer beliebigen Konstanten

$$G\left(x, y(x), y(x+h), y(x+2h), ..., y(x+nh)\right) = 0 \qquad \text{(Darstellung 2)}$$

bzw. in der Indexschreibweise

$$H\left(k, y_k, y_{k+1}, y_{k+2}, ..., y_{k+n}\right) = 0 \qquad \text{(Darstellung 3)}$$

Dabei sind F, G und H Funktionen in $n+2$ Variablen und $n \in \mathbb{N}$. Die Funktion H besitzt die Definitionsmenge $D = \{k, k+1, k+2, ...\}$ mit $k \in n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

■

Bemerkung 13.8:

(i) Von der Darstellung 1 zur Darstellung 2 gelangt man mit folgenden Beziehungen:

$$\Delta y(x) = y(x+h) - y(x)$$
$$\Delta^2 y(x) = \Delta[\Delta y(x)] = y(x+2h) - 2y(x+h) + y(x)$$
$$\Delta^3 y(x) = \Delta[\Delta^2 y(x)] = y(x+3h) - 3y(x+2h) + 3y(x+h) - y(x)$$
$$\ldots$$
$$\Delta^m y(x) = \sum_{k=0}^{m} \tbinom{m}{k} (-1)^k \cdot y(x+(m-k)h) \qquad (m \in \mathbb{N})$$

(ii) Von der Darstellung 2 zur Darstellung 3 gelangt man durch folgende Indexschreibweise:

$$y_k = y(x)$$
$$y_{k+1} = y(x+h)$$
$$y_{k+2} = y(x+2h)$$
$$\ldots$$
$$y_{k+n} = y(x+nh)$$

Beispiele 13.9

Satz 13.10: Eine Funktion q_k heißt *Lösung* einer Differenzengleichung $H(k, y_k, y_{k+1}, y_{k+2}, ..., y_{k+n}) = 0$ über einer Menge S, wenn

$$H(k, q_k, q_{k+1}, q_{k+2}, ..., q_{k+n}) = 0 \qquad \text{für alle } k \in S$$

■

Wir wollen nun zur wichtigen Klasse der *linearen* Differenzengleichungen übergehen.

Definition 13.11: Eine Differenzengleichung heißt *linear* über einer Menge $S \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$, wenn sie wie folgt geschrieben werden kann:

$$f_n(k)\, y_{k+n} + f_{n-1}(k)\, y_{k+n-1} + ... + f_1(k)\, y_{k+1} + f_0(k)\, y_k = g(k)$$

Dabei sind $f_n, f_{n-1}, ..., f_1, f_0$ und g Funktionen der unabhängigen Variablen k.

Wenn $g(k) = 0$ für alle $k \in S$ ist, handelt es sich um eine *homogene lineare Differenzengleichung.*

Wenn $g(k) \neq 0$ für mindestens ein $k \in S$ ist, handelt es sich um eine *inhomogene lineare Differenzengleichung.*

Sind die Funktionen $f_n, f_{n-1}, ..., f_1, f_0$ konstante Funktionen, so spricht man von einer *linearen Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten.*

■

Es folgt ein Existenz- und Eindeutigkeitssatz für lineare Differenzengleichungen.

Satz 13.12: Eine *lineare Differenzengleichung n-ter Ordnung* der Form

$$f_n(k)\, y_{k+n} + f_{n-1}(k)\, y_{k+n-1} + \ldots + f_1(k)\, y_{k+1} + f_0(k)\, y_k = g(k)$$

über einer Menge S aufeinanderfolgender ganzzahliger Werte von k besitzt eine eindeutige Lösung y. Die Funktionswerte der Lösung y sind dabei für n aufeinanderfolgende k-Werte beliebig vorgegeben.

■

Analog zu Satz 12.10 gilt für die allgemeine Lösung einer linearen Differenzengleichung:

Satz 13.13: Die allgemeine Lösung y_k^A einer *inhomogenen linearen Differenzengleichung* ist als Summe

- der allgemeinen Lösung y_k^H der zugehörigen homogenen linearen Differenzengleichung
- und einer (beliebigen) partikulären Lösung y_k^P der inhomogenen linearen Differenzengleichung

darstellbar:

$$y_k^A = y_k^H + y_k^P$$

■

In der Praxis spielen die linearen Differenzengleichungen mit *konstanten Koeffizienten* die wichtigste Rolle. Sie sollen im Folgenden behandelt werden.

13.2.1 Lineare Differenzengleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Eine lineare Differenzengleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten hat die Form

$$y_{k+1} = a \cdot y_k + g_k \qquad \text{mit } a \text{ Konstante, } k \in S, g_k := g(k)$$

Wir betrachten zunächst die *homogene* Gleichung. Sie besitzt die Form

$$y_{k+1} = a \cdot y_k \qquad \text{mit } a \text{ Konstante, } k \in S$$

und kann wie folgt gelöst werden.

Sei S die Definitionsmenge der Differenzengleichung mit $S = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Nach Satz 13.12 besitzt die Gleichung eine eindeutige Lösung y, deren Funktionswerte für $n = 1$ k-Werte beliebig vorgegeben sind. Wenn also y in $k = 0$ den Wert C (C beliebige Konstante) annimmt, dann können die Funktionswerte y_k der Lösungsfunktion schrittweise berechnet werden:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= a \cdot y_0 = a \cdot C \\
y_2 &= a \cdot y_1 = a \cdot a \cdot C = a^2 \cdot C \\
y_3 &= a \cdot y_2 = a \cdot a \cdot a \cdot C = a^3 \cdot C \\
&\ldots \\
y_k &= a \cdot y_{k-1} = a^k \cdot C
\end{aligned}
$$

Wir haben mit $y_k = a^k \cdot C$ die allgemeine Lösung der homogenen linearen Differenzengleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten gefunden.

Wenden wir uns nun der *inhomogenen* Gleichung zu. Sie besitzt die Form

$$y_{k+1} = a \cdot y_k + g_k \qquad \text{mit } a \text{ Konstante, } k \in S, g_k := g(k)$$

Eine partikuläre Lösung kann durch die Methode „Variation der Konstanten" gefunden werden. Hierbei wird die Konstante C der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung als Funktion von k angesehen: $C_k = C(k)$. Der Ansatz

$$y_k^P = C_k \cdot a^k$$

wird dann zur Lösung der inhomogenen Gleichung, wenn für die C_k gilt:

$$C_k = \sum_{m=0}^{k-1} \frac{g_m}{a^{m+1}}$$

Damit können wir folgenden Satz angeben.

Satz 13.14: Für eine *inhomogene lineare Differenzengleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten* der Form

$$y_{k+1} = a \cdot y_k + g_k \qquad \text{mit } a \text{ Konstante, } k \in S, g_k := g(k)$$

kann die allgemeine Lösung y_k^A wie folgt angegeben werden.

1. Die allgemeine Lösung y_k^H der zugehörigen homogenen linearen Differenzengleichung lautet
$$y_k^H = C \cdot a^k \qquad (C \text{ beliebige Konstante})$$

2. Eine partikuläre Lösung y_k^P der inhomogenen linearen Differenzengleichung ist
$$y_k^P = C_k \cdot a^k \qquad \text{mit } C_k = \sum_{m=0}^{k-1} \frac{g_m}{a^{m+1}}$$

3. Die allgemeine Lösung y_k^A der inhomogenen linearen Differenzengleichung lautet somit
$$y_k^A = y_k^H + y_k^P$$

■

Beispiel 13.15

13.2.2 Lineare Differenzengleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Eine lineare Differenzengleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten hat die Form

$$y_{k+2} + a_1 y_{k+1} + a_0 y_k = g_k \qquad \text{mit } a_0, a_1 \text{ Konstanten, } (k = 0, 1, 2, 3, ...), g_k := g(k)$$

Betrachten wir wieder zunächst die *homogene* Gleichung. Sie besitzt die Form

$$y_{k+2} + a_1 y_{k+1} + a_0 y_k = 0 \qquad \text{mit } a_0, a_1 \text{ Konstanten, } k = 0, 1, 2, 3, ...$$

Über die *Lösungsmenge* einer homogenen linearen Differenzengleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten lässt sich analog zu Satz 12.18 sagen:

Satz 13.16: Die allgemeine Lösung y_k einer *homogenen linearen Differenzengleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten*

$$y_{k+2} + a_1 y_{k+1} + a_0 y_k = 0 \qquad \text{mit } a_0, a_1 \text{ Konstanten, } k = 0, 1, 2, 3, ...$$

ist als Linearkombination zweier *linear unabhängiger Lösungen* (Basislösungen) $y_1(k)$ und $y_2(k)$ darstellbar:

$$y_k = C_1 y_1(k) + C_2 y_2(k) \qquad (C_1, C_2 \in \mathbb{R} \text{ beliebige Konstanten})$$

Dabei sind $y_1(k)$ und $y_2(k)$ genau dann Basislösungen, wenn gilt:

$$\begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1(1) & y_2(1) \end{vmatrix} \neq 0$$

■

Bemerkung 13.17: Die beiden Basislösungen $y_1(k)$ und $y_2(k)$ bilden ein sogenanntes *Fundamentalsystem* der Differenzengleichung.

Der folgende Satz sagt, wie die allgemeine Lösung gefunden werden kann (analog zu Satz 12.21).

Satz 13.18: Bei der *homogenen linearen Differenzengleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten*

$$y_{k+2} + a_1 y_{k+1} + a_0 y_k = 0 \qquad \text{mit } a_0, a_1 \text{ Konstanten, } k = 0, 1, 2, 3, ...$$

führt der *Lösungsansatz*

$$y_k = q^k \qquad (k = 0, 1, 2, 3, ...)$$

zu einem Fundamentalsystem der Differenzengleichung (zu den beiden Basislösungen $y_1(k)$ und $y_2(k)$). Die beiden Basislösungen $y_1(k)$ und $y_2(k)$ hängen von der Art der Lösungen q_1 und q_2 der zugehörigen *charakteristischen Gleichung*

$$q^2 + a_1 q + a_0 = 0$$

wie folgt ab:

1. Fall: $q_1 \neq q_2$ mit $q_1, q_2 \in \mathbb{R}$ (reell)

   Fundamentalsystem: $y_1(k) = q_1^k$ und $y_2(k) = q_2^k$
   Allgemeine Lösung: $y_k = C_1 q_1^k + C_2 q_2^k$

2. Fall: $q_1 = q_2 = q$ mit $q_1, q_2, q \in \mathbb{R}$ (reell)

   Fundamentalsystem: $y_1(k) = q^k$ und $y_2(k) = kq^k$
   Allgemeine Lösung: $y_k = (C_1 + C_2 k) q^k$

3. Fall: $q_1 = r + js, q_2 = r - js$ mit $r, s \in \mathbb{R}$ (q_1, q_2 sind konjugiert komplex)

   Fundamentalsystem: $y_1(k) = q_1^k = (r + js)^k$ und $y_2(k) = q_2^k = (r - js)^k$
   Allgemeine Lösung: $y_k = C_1 q_1^k + C_2 q_2^k = C_1 (r + js)^k + C_2 (r - js)^k$

Dabei sind C_1, C_2 beliebige Konstanten.

■

Beispiel 13.19

Wenden wir uns nun der Lösung der *inhomogenen* Gleichung zu.

Für die Lösungsmenge der *inhomogenen* linearen Differenzengleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten gilt analog zu Satz 12.23:

Satz 13.20: Für eine *inhomogene lineare Differenzengleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten* der Form

$y_{k+2} + a_1 y_{k+1} + a_0 y_k = g_k$ mit a_0, a_1 Konstanten, $(k = 0, 1, 2, 3, \ldots), g_k := g(k)$

ist die *allgemeine Lösung* y_k^A als Summe

- der allgemeinen Lösung y_k^H der zugehörigen homogenen linearen Differenzengleichung

  $$y_{k+2} + a_1 y_{k+1} + a_0 y_k = 0 \qquad \text{mit } a_0, a_1 \text{ Konstanten}, (k = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

- und einer partikulären Lösung y_k^P der inhomogenen linearen Differenzengleichung

  $y_{k+2} + a_1 y_{k+1} + a_0 y_k = g_k$ mit a_0, a_1 Konstanten, $(k = 0, 1, 2, 3, \ldots), g_k := g(k)$

  darstellbar:

$$y_k^A = y_k^H + y_k^P$$

■

Zur Bestimmung einer partikulären Lösung ist folgende Tabelle hilfreich (vergl. Tabelle 12.24 und Bemerkung 12.25).

Tabelle 13.21: Lösungsansätze für eine partikuläre Lösung y_k^P einer inhomogenen linearen Differenzengleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

$g_k = ...$	Lösungsansatz $y_k^P = ...$
a^k	$A \cdot a^k$
k^n	$A_0 + A_1 k + A_2 k^2 + ... + A_n k^n$
$a^k k^n$	$a^k(A_0 + A_1 k + A_2 k^2 + ... + A_n k^n)$
$\sin bk$ oder $\cos bk$	$A \sin bk + B \cos bk$
$a^k \sin bk$ oder $a^k \cos bk$	$a^k \left(A \sin bk + B \cos bk\right)$

Dabei werden die Koeffizienten $A, B, A_1, ..., A_n$ nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten bestimmt.

Beispiel 13.22

14 Lösung von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten mit Hilfe der Laplace-Transformation

14.1 Laplace-Transformation

Die Laplace-Transformation wandelt eine Funktion mit einer reellen Veränderlichen in eine Funktion mit einer komplexen Variablen um.

Skizze 14.1

Definition 14.2: Sei $f(t)$ eine reelle Funktion mit einer reellen Variablen t, die für $t > 0$ definiert ist. Dann ist die *Laplace-Transformierte* $F(s)$ von $f(t)$ wie folgt definiert:

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \lim_{\substack{T\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \int_{\varepsilon}^{T} f(t)\cdot e^{-st}dt = \int_{0+}^{\infty} f(t)\cdot e^{-st}dt \qquad \text{mit } (0 < \varepsilon < T)$$

Dabei ist $s = \sigma + j\omega$ eine komplexe Variable ($\sigma, \omega \in \mathbb{R}$).

$\mathcal{L}$ heißt der *Laplace-Operator.*

■

Unter welchen Bedingungen existiert eine Laplace-Transformierte zu einer gegebenen Funktion $f(t)$? Eine Antwort gibt der folgende Satz.

Satz 14.3 Sei $f(t)$ eine reelle Funktion für $t > 0$ und sei $F(\sigma)$ für ein $\sigma_0 \in \mathbb{R}$ absolut konvergent, d. h. gelte

$$\int_{0+}^{\infty} |f(t)|\cdot e^{-\sigma_0 t}dt < +\infty$$

Dann ist $f(t)$ *Laplace-transformierbar* für $\mathrm{Re}(s) > \sigma_0$.

■

Die *inverse Laplace-Transformation* wie folgt definiert.

Defnition 14.4 Sei $F(s)$ die Laplace-Transformierte von $f(t), t > 0$. Das Integral

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)\cdot e^{st}ds \qquad \text{mit } c > \sigma_0 \ (\sigma_0 \text{ aus Satz 14.3})$$

heißt dann die *inverse Laplace-Transformation* von $F(s)$.

Bemerkung 14.5

Beispiel 14.6

14.1.1 Einige wichtige Eigenschaften der Laplace-Transformation

Es ist $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$.

1. Die Laplace-Transformation ist *linear*, d. h. es gilt

$$\mathcal{L}[f(t) + g(t)] = \mathcal{L}[f(t)] + \mathcal{L}[g(t)]$$

und

$$\mathcal{L}[af(t)] = a\mathcal{L}[f(t)]$$

2. Die inverse Laplace-Transformation ist ebenso *linear.*

3. Für die Ableitung gilt:

   Erste Ableitung:

$$\mathcal{L}\left[\frac{d\left[f\left(t\right)\right]}{dt}\right] = s \cdot F\left(s\right) - f\left(0_{+}\right)$$

   Zweite Ableitung:

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^{2}\left[f\left(t\right)\right]}{dt^{2}}\right] = s^{2} \cdot F\left(s\right) - s \cdot f\left(0_{+}\right) - \left[\frac{d\left[f\left(t\right)\right]}{dt}\right]_{t=0_{+}}$$

   n-te Ableitung:

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^{n}\left[f\left(t\right)\right]}{dt^{n}}\right] = s^{n} \cdot F\left(s\right) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} \cdot \left[\frac{d^{k}\left[f\left(t\right)\right]}{dt^{k}}\right]_{t=0_{+}}$$

4. Für das Integral gilt:

$$\mathcal{L}\left[\int_{0}^{t} f\left(\tau\right) d\tau\right] = \frac{1}{s} \cdot F\left(s\right)$$

5. Grenzwertsätze

   Anfangswertsatz

$$\lim_{t \to 0} f\left(t\right) = \lim_{\sigma \to \infty} s \cdot F\left(s\right) \qquad \text{mit } \sigma = \mathrm{Re}\left(s\right)$$

   Endwertsatz

$$\lim_{t \to \infty} f\left(t\right) = \lim_{\sigma \to 0} s \cdot F\left(s\right) \qquad \text{mit } \sigma = \mathrm{Re}\left(s\right)$$

6. Ähnlichkeitssätze

$$\mathcal{L}\left[f\left(\frac{t}{a}\right)\right] = a \cdot F\left(as\right) \qquad \left(a > 0\right)$$

   und

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F\left(\frac{s}{a}\right) = a \cdot f\left(at\right) \qquad \left(a > 0\right)\right]$$

7. Verschiebungssatz

$$\mathcal{L}\left[f\left(t-a\right)\right] = e^{-as} F\left(s\right) \qquad \left(a > 0\right)$$

8. Dämpfungssatz

$$\mathcal{L}\left[e^{-at} f\left(t\right)\right] = F(s+a) \qquad \left(a > 0\right)$$

Beispiele 14.7

14.2 Anwendung der Laplace-Transformation zur Lösung von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Wir betrachten das folgende Anfangswertproblem.

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = g(t) \qquad (a_i \in \mathbb{R})$$

mit den Anfangsbedingungen

$$[y(t)]_{t=0+} = y_0^0 \qquad (y_0^0 \text{ Konstante})$$

$$[y'(t)]_{t=0+} = y_0^1 \qquad (y_0^1 \text{ Konstante})$$

Die Laplace-Transformierte der homogenen Differentialgleichung lautet:

$$\mathcal{L}[y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t)] = \mathcal{L}[y''(t)] + a_1 \mathcal{L}[y'(t)] + a_0 \mathcal{L}[y(t)]$$

Mit $\mathcal{L}[y'(t)] = s \cdot Y(s) - y(0_+)$ und $\mathcal{L}[y''(t)] = s^2 \cdot Y(s) - s \cdot y(0_+) - \left[\frac{d[y(t)]}{dt}\right]_{t=0_+}$ erhalten wir die Laplace-transformierte Differentialgleichung

$$s^2 \cdot Y(s) - s \cdot y_0^0 - y_0^1 + a_1 \left(s \cdot Y(s) - y_0^0\right) + a_0 \cdot Y(s) = G(s)$$

Dabei sind $Y(s)$ und $G(s)$ die Laplace-Transformierten von $y(t)$ bzw. $g(t)$.

Bemerkung 14.8: Die Laplace-transformierte Differentialgleichung vereinfacht sich natürlich stark, wenn die Anfangsbedingungen gleich Null sind, d. h. für $y_0^0 = y_0^1 = 0$.

Beispiel 14.9 .

Tabelle 14.10: Laplace-Transformation (Auszug)

Nr.	Zeitfunktion $f(t)$ Urbildbereich	Laplace-Transformierte $F(s)$ Bildbereich
1	$\delta(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{für } t \neq 0 \\ \infty & \text{für } t = 0 \end{array} \right\}$ Impulsfunktion	1 für alle s
2	$\sigma(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t > 0 \end{array} \right\}$ Sprungfunktion (Einheitssprung)	$\frac{1}{s}$ für $\mathrm{Re}(s) > 0$
3	$t \qquad (t > 0)$	$\frac{1}{s^2}$ für $\mathrm{Re}(s) > 0$
4	$t^n \qquad (t > 0, n = 0, 1, 2, ...)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$ für $\mathrm{Re}(s) > 0$
5	$e^{-at} \qquad (t > 0)$	$\frac{1}{s+a}$ für $\mathrm{Re}(s) > -a$ bzw. $\mathrm{Re}(s) > -\mathrm{Re}(a)$
6	$\sin(\omega_0 t) \qquad (t > 0)$	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$ für $\mathrm{Re}(s) > 0$
7	$\cos \omega_0 t \qquad (t > 0)$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$ für $\mathrm{Re}(s) > 0$
8	$e^{-at} \sin(\omega_0 t) \qquad (t > 0)$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$ für $\mathrm{Re}(s) > -a$
9	$e^{-at} \sin(\omega_0 t) \qquad (t > 0)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$ für $\mathrm{Re}(s) > -a$

♣

Übungsaufgaben
Ingenieur-Mathematik II
3. Semester

Prof. W. Tischhauser

2003

Übungsaufgaben

Ingenieur-Mathematik II

3. Semester

Aufgabe 10.1: Bilde die partiellen Ableitungen 1. Ordnung der Funktion

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2^2 (\sin x_1 + \sin x_2)$$

Aufgabe 10.2: Bilde die partiellen Ableitungen 1. Ordnung der Funktion

$$f(x, y) = \ln\left(x + y^2\right) - e^{2xy} + 3x$$

und bestimme f_x und f_y an der Stelle $(x, y) = (0, 1)$.

Aufgabe 10.3: Bilde die partiellen Ableitungen der folgenden Funktion bis zur 2. Ordnung.

$$f(x, y, z) = e^{x-y} \cos 3z$$

Aufgabe 10.4: Im $\mathbb{R}^3$ sei eine Fläche $z = f(x, y)$ gegeben. Ferner sei $P = (x_0, y_0, z_0)$ mit $z_0 = f(x_0, y_0)$ ein Punkt der gegebenen Fläche.

Die Gleichung der *Tangentialebene* im Punkt P lautet dann:

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Bestimme die Gleichung der Tangentialebene der Fläche $z = x^2 + y^2$ im Punkt $P = (1, 1, 2)$.

Aufgabe 10.5: Bestimme die Ableitung der Funktion

$$z = f(x, y) = (x - y)^2$$

längs eines Kreises mit der Parameterdarstellung

$$x(t) = 2\cos t \quad \text{und} \quad y(t) = 2\sin t \quad \text{mit} \quad 0 \leq t < 2\pi$$

(D. h. es ist die Ableitung der Funktion $z = f(x, y)$ nach dem Parameter t zu bilden).

Aufgabe 12.1: Bestimme die Lösung der Differentialgleichung

$$y' = y$$

durch „Trennung der Variablen".

Aufgabe 12.2: Bestimme die Lösung der Differentialgleichung

$$y' = 1 + 2\left(\frac{y}{x}\right)$$

durch Substitution.

Aufgabe 12.3: Bestimme die Lösung der linearen Differentialgleichung

$$y' + \frac{y}{x} = \cos x$$

Aufgabe 12.4: Bestimme die Lösung des folgenden Randwertproblems.

$$\begin{aligned} y'' - 4y' + 4y &= 0 \\ y(0) &= 6 \\ y(2) &= 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 12.5: Bestimme die Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + 4y' + 20y = 0$$

Aufgabe 12.6: Bestimme die Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung

$$y'' + y' - 2y = g(x)$$

mit

a) $g(x) = 3e^{4x}$

b) $g(x) = 6e^{x}$

Aufgabe 12.7: Bestimme die Lösung der Differentialgleichung

$$y'' - 6y' + 9y = 2e^{x} + 9x - 15$$

Hinweis: Zerlege die Störfunktion $g(x) = 2e^{x} + 9x - 15$ in zwei Teilstörfunktionen $g_1(x) = 2e^{x}$ und $g_2(x) = 9x - 15$. Für $g_1(x)$ ist der Lösungsansatz $y_{P1}(x)$, für $g_2(x)$ ist der Lösungsansatz $y_{P2}(x)$ gemäß Tabelle zu wählen. Der Gesamtlösungsansatz $y_P(x)$ ist dann die Summe von $y_{P1}(x)$ und $y_{P2}(x)$:

$$y_P(x) = y_{P1}(x) + y_{P2}(x)$$

Aufgabe 12.8: Bestimme die Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\overrightarrow{y'} = A\overrightarrow{y} \qquad \text{mit } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$