

Prof. E. RASCH

St. ...

... I

St.

ba. Familien

WS 98/99

Vorbemerkung

Die Vorlesung Signaltheorie verfolgt zwei Ziele:

1. Einführung in die Methoden zur Darstellung von Signalen.

Dabei wird besonders auf die den Methoden zugrunde liegenden Gedankengänge eingegangen.

Zugunsten einer anschaulichen Darstellung dieser Gedanken wird teilweise bewußt auf eine strenge mathematische Herleitung der Methoden verzichtet.

2. Anwendung der Methoden auf technisch relevante Fragestellungen und Interpretation der Ergebnisse, die zum tieferen Verständnis des Stoffes beitragen sollen.

Der vorliegende Umdruck ist als Unterstützung der Vorlesung gedacht. Es ist deshalb weitgehend auf erklärende Textpassagen verzichtet worden.

Vorbemerkung

Die Vorlesung Systemtheorie verfolgt die gleichen Ziele, die in der Vorlesung Signaltheorie formuliert worden sind.

Aufbauend auf die Methoden zur Darstellung von Signalen, wird hier in die Methoden zur Darstellung von Systemeigenschaften eingeführt.

Die durch die Anwendung dieser Methoden auf technische Systeme in Verbindung mit technisch relevanten, dynamischen Anregungen erzielten Ergebnisse werden auch auf ihre Auswirkung auf fachübergreifende Lehrinhalte interpretiert.

Der vorliegende Umdruck unterstützt die Vorlesung.

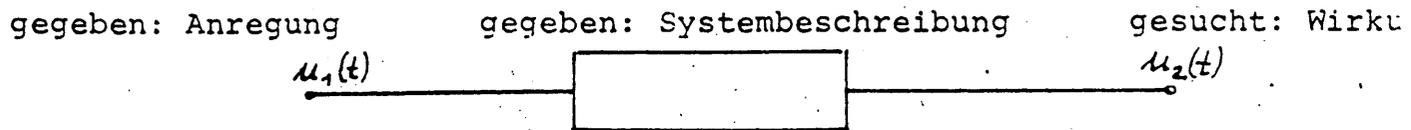
In der knappen Darstellung wurde deshalb oft auf interpretierende Texte und Zwischenergebnisse verzichtet.

Systemtheorie

1. Einleitung

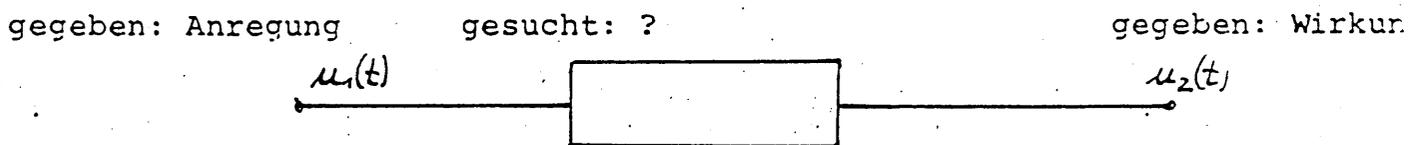
Während in der Signaltheorie das zeitabhängige Signal als Träger einer Nachricht mathematisch gefaßt und beurteilt wurde, wird in der Systemanalyse die Übertragung und Verarbeitung der Signale durch Systeme beschrieben und die Wirkung der Systeme beurteilt.

Systemanalyse:



In der Systemsynthese wird eine möglichst einfache Systembeschreibung gesucht, die die geforderte Signalwandlung bewirkt.

Systemsynthese:



Die zeitinvarianten wesentlichen Eigenschaften des Systems erkennt man durch die Definition von Übertragungsprozessen, die bei bestimmten Betriebsanordnungen (Art der Anregung, Art des Abschlusses) gelten.

Einfache Testsignale sind:

- die Sinusfunktion
- die Sprungfunktion
- die Stoßfunktion (Nadelimpuls).

Mit diesen Anregungen werden nun die Übertragungsprozesse des Tiefpaßkanals dargestellt.

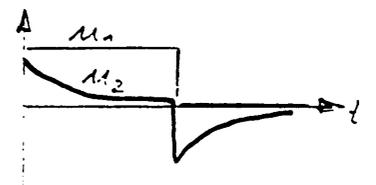
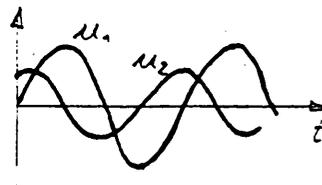
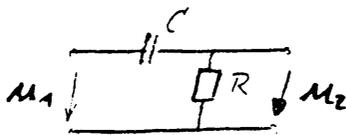
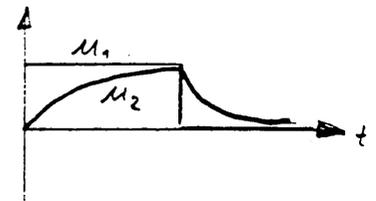
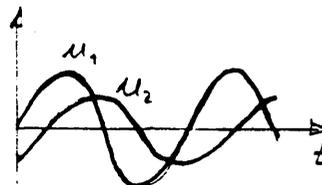
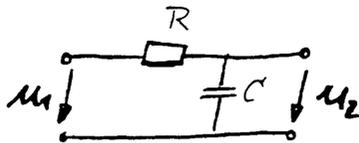
Signaltheorie

1. Einleitung

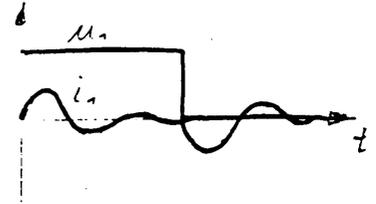
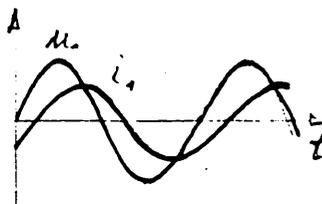
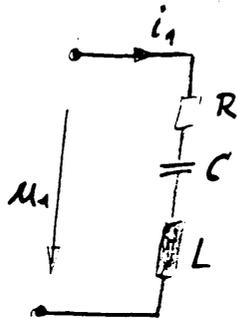
Wirkung von Zeitfunktionen auf Netzwerke

Beispiel für Vierpole: u_1 : Sinusanregung
 u_2 : Sinuswirkung

u_1 : Sprunganregung
 u_2 : verz. Zeitfunktion



Beispiel für Zweipole:



Beschreiben läßt sich das Verhalten von Netzwerken mit Differentialgleichungen. In ihnen ist die gesuchte Wirkung indirekt enthalten. Sie können nicht nach der gesuchten unbekanntem Wirkung direkt aufgelöst werden.

Die unbekanntem Wirkung erhält man aus der Lösung der Differentialgleichung, bei der die Schaltung und die Art der Anregung eingeht.

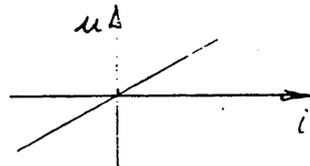
1.1 Wirkung von Bauelementen

Lineare, zeitinvariante Verknüpfung von Ursache und Wirkung.

Widerstand

$$u = R \cdot i$$

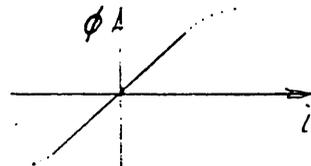
$$u \sim i$$



Spule

$$\phi = A_L \cdot N \cdot i$$

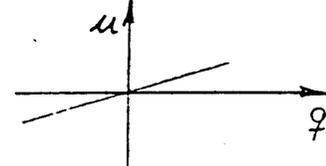
$$\phi \sim i$$



Kondensator

$$u = \frac{1}{C} \cdot q$$

$$u \sim q$$



Kennlinien

Die Anregung ist in der Regel kein Festwert, sondern ein zeitabhängiges Signal, z.B. $i(t)$.

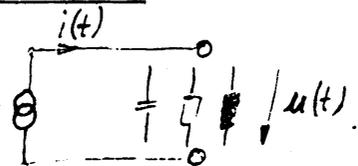
Die Wirkung wird ebenfalls zeitabhängig werden.

$$u_R(t) = R \cdot i(t)$$

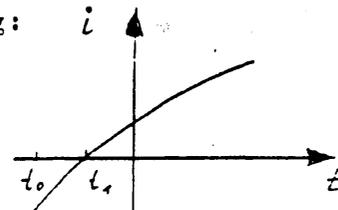
$$u_L(t) = N \cdot \frac{d\phi}{dt} = A_L \cdot N^2 \cdot \frac{di}{dt} = L \cdot \frac{di}{dt}$$

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \cdot \int i dt$$

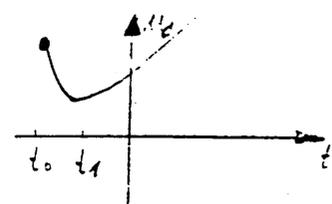
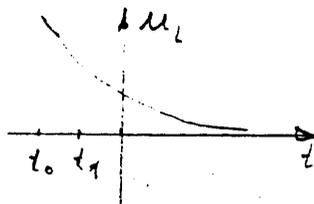
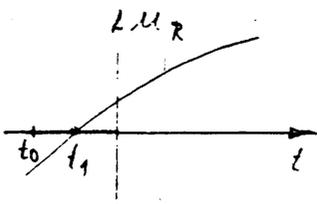
Beispiel:



Anregung:



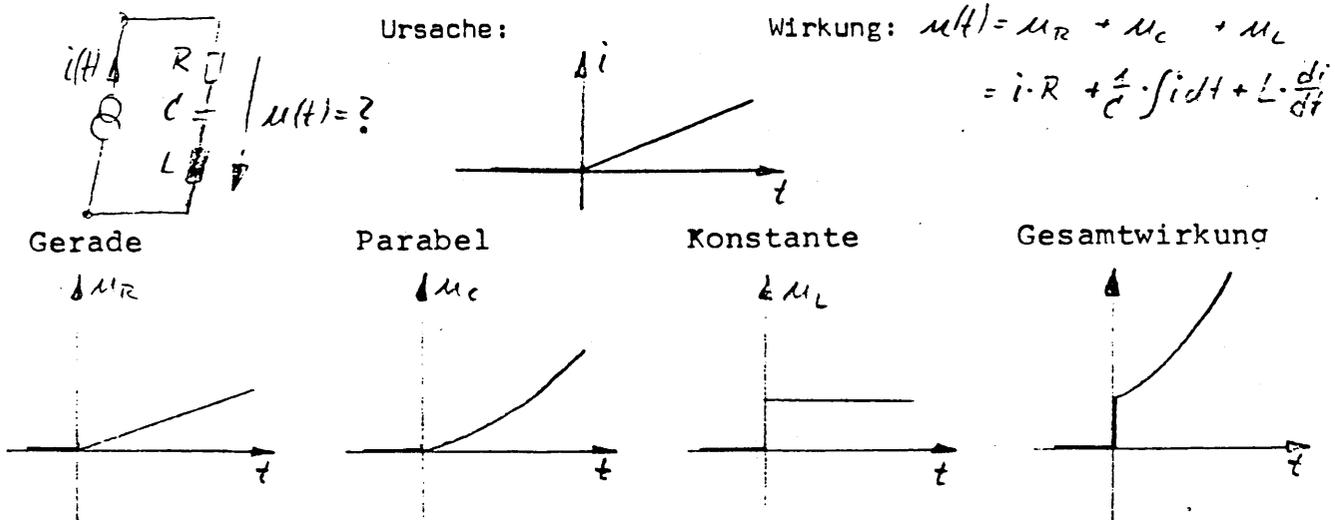
Wirkung



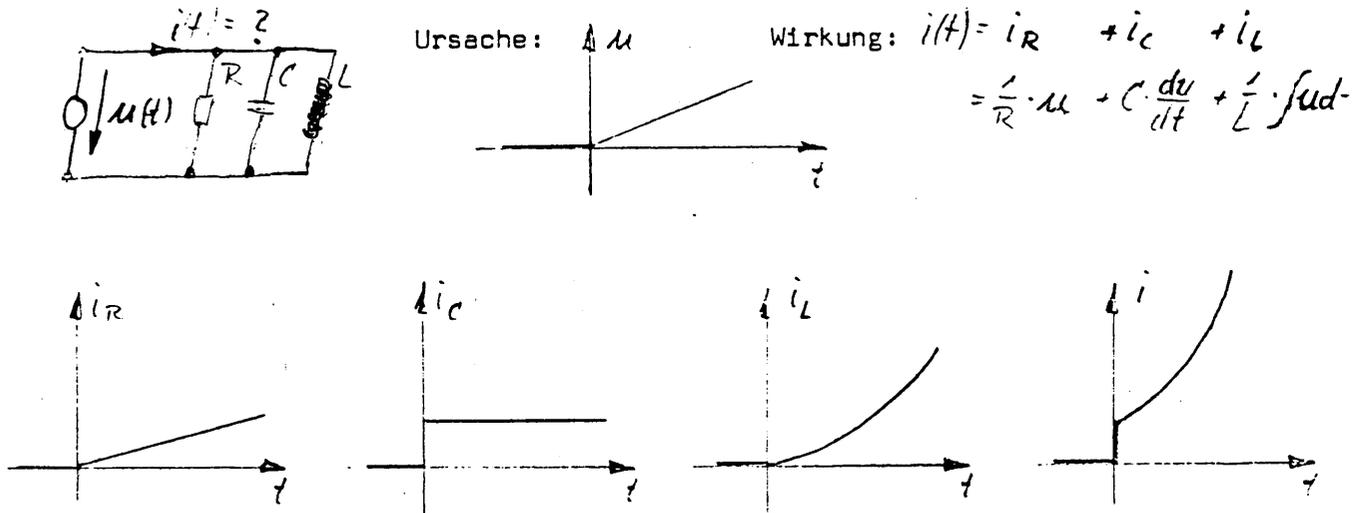
Üblicherweise setzt man den Betrachtungszeitpunkt $t_0 = 0$, ab der die anregende Zeitfunktion beginnt und die Energie in den Bauelementen zu diesem Zeitpunkt ebenfalls Null.

Hier: Ladung des Kondensators $q_0 = 0$.

1.2 Stromaufprägung auf eine Masche

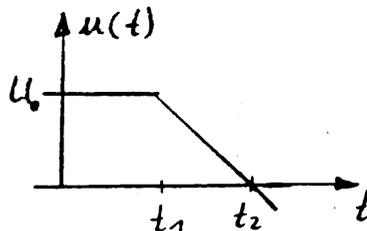
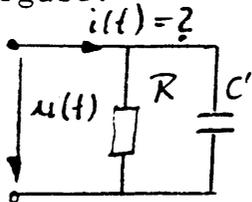


1.3 Spannungsaufprägung auf einen Knoten



Die Wirkungen der Bauelemente beeinflussen sich nicht gegenseitig. Es wird hier unabhängig differenziert und integriert.

Aufgabe:



$U_0 = 5V$ $C = 2\mu F$ $R = 3k\Omega$
 $t_1 = 4ms$ $t_2 = 5ms$

1.4 Spannungsaufprägung auf eine Masche

Der Strom muß sich so einstellen, daß zu jedem Zeitpunkt gilt:

$$u_R + u_L = u(t)$$

Da $u_R \propto$ der Stromamplitude und $u_L \propto$ der Stromänderung ist,

muß zu jedem Zeitpunkt die Summe proportional der aufgeprägten Spannung sein.

Welche Stromzeitfunktion, die als Wirkung von beiden Bauelementen beeinflußt wird, kann die Forderungen ausgleichen ?

$$L \cdot \frac{di}{dt} + R \cdot i(t) = u(t)$$

Stromänderung + Stromamplitude $\hat{=}$ Spannungseinprägung

Ein Speicherelement in einer Masche führt zur Differentialgleichung 1. Ordnung, wobei die Störfunktion (rechte Seite) nur die Anregung ist.

1. Beispiel

$$u(t) = \begin{cases} U_0 & \text{für } t < t_0 = 0 \Rightarrow i_0 = \frac{U_0}{R} \text{ Gleichstromvergangenheit} \\ 0 & \text{für } t > t_0 = 0 \Rightarrow i(t) = ? \end{cases}$$

Maschenkurzschluß für $t > 0$

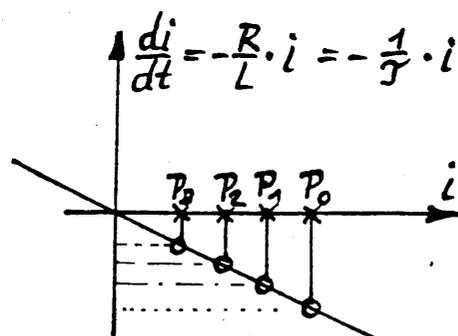
$$L \cdot \frac{di}{dt} + R \cdot i(t) = 0$$

Homogene Dgl 1. Ordnung

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} \cdot i(t) = 0$$

Die Steigung ist negativ
und proportional der Amplitude

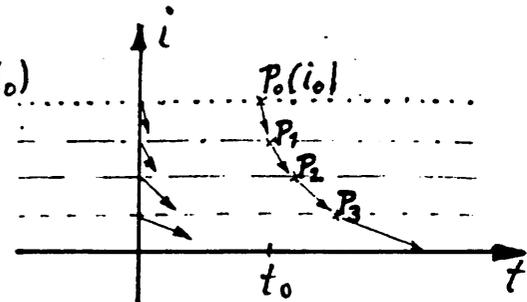
Grafische Darstellung



Welche Zeitfunktion $i(t)$ erfüllt dies ?

Konstruktion:

Bei Vorgabe einer Anfangsbedingung: $i_0 = i(t_0)$
 ergibt sich der Anfangspunkt: $P_0(i_0)$



Die Dgl 1. Ordnung bestimmt ein Richtungsfeld.

Die Lösungen sind Kurvenscharen, die von einem Parameter γ
 - die Steigung - abhängen.

Rechnung:

$$\frac{di}{dt} = -\frac{R}{L} \cdot i$$

Trennung der Variablen:

$$\frac{di}{i} = -\frac{R}{L} dt = -\frac{1}{\tau} dt$$

$$\int \frac{1}{i} di = -\frac{1}{\tau} \int dt$$

$$\ln(i) = -\frac{t}{\tau} + k^*$$

$$i = e^{-\frac{t}{\tau} + k^*} = e^{k^*} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$i = k \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Parameter für die Kurvenschar: k

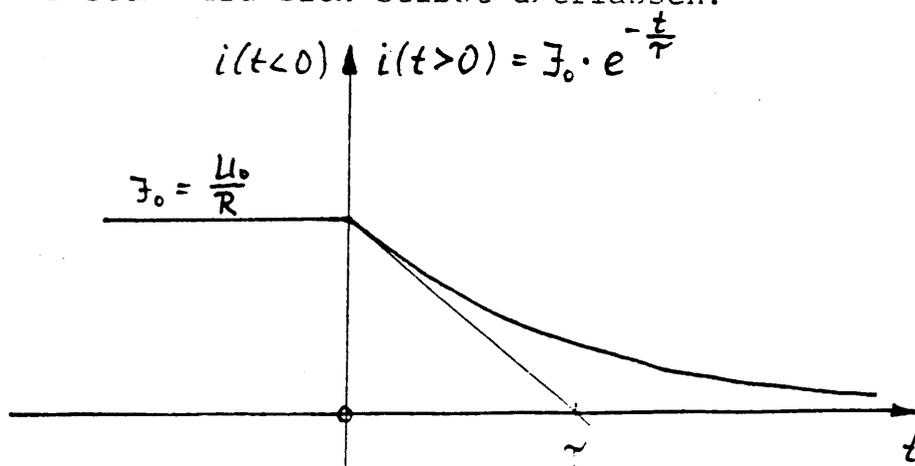
Daraus erhält man eine Kurve,
 wenn die Anfangsbedingung
 gegeben ist:

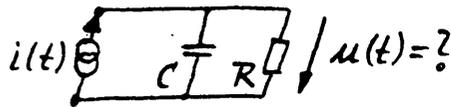
$$\frac{U_0}{R} \equiv I_0 = i(t_0=0) = k \cdot e^{-\frac{0}{\tau}}$$

$$I_0 = k$$

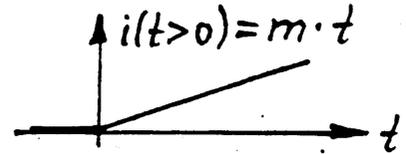
Lösung für den Ausgleichsvorgang:

Das System wird sich selbst überlassen.



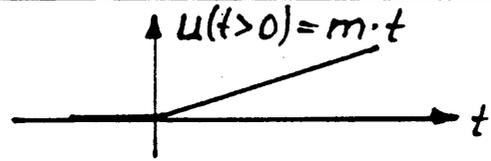
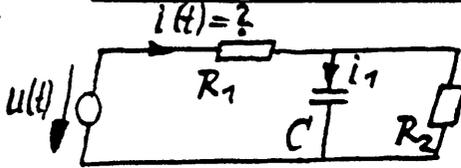
1.5 Stromaufprägung auf einen Knoten

$$C \cdot \frac{du}{dt} + \frac{1}{R} \cdot u(t) = i(t)$$



Spannungsänderung + Spannungsamplitude \sim Stromeinprägung

Ein Speicherelement an einem Knoten führt zur 1. Ordnung, wobei die Störfunktion (rechte Seite) nur die Anregung ist.

1.6 Anregung mehrerer Maschen, die ein Speicherelement enthalten.

$$\text{I } u(t) = i \cdot R_1 + \frac{1}{C} \int i_1 dt$$

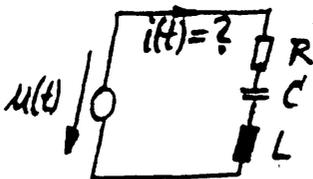
$$\frac{du}{dt} = R_1 \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \cdot i_1$$

$$\text{II } \frac{1}{C} \int i_1 dt = (i - i_1) \cdot R_2$$

$$R_1 \cdot R_2 \cdot C \cdot \frac{di}{dt} + (R_1 + R_2) \cdot i(t) = R_2 \cdot C \cdot \frac{du}{dt} + u(t)$$

Ein Speicherelement in einem Netzwerk mit mehreren Maschen führt zu einer 1. Ordnung, wobei die Störfunktion (rechte Seite) die Anregung und deren Ableitung ist.

Bedingung: Die Anregung muß differenzierbar sein !

1.7 Anregung einer Masche, die mehrere Speicherelemente enthält.

$$L \cdot \frac{di}{dt} + i \cdot R + \frac{1}{C} \int i dt = u(t)$$

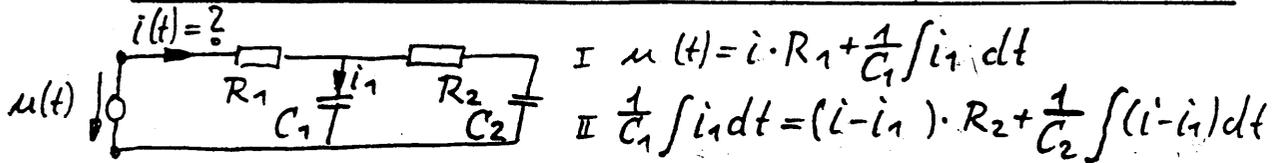
$$L \cdot \frac{d^2 i}{dt^2} + R \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \cdot i(t) = \frac{du}{dt}$$

Der Strom muß sich so einstellen, daß zu jedem Zeitpunkt die Krümmung des Stromzeitverlaufs und die Stromänderung und die Stromamplitude proportional der aufgeprägten Spannungsänderung ist.

Zwei unterschiedliche Speicherelemente in einer Masche führen zu einer 2. Ordnung, wobei die Störfunktion (rechte Seite) die Ableitung der Anregung ist.

Bedingung: Die Anregung muß differenzierbar sein.

Die Wirkungen an den Bauelementen beeinflussen sich gegenseitig. Dies bedingt Lösung von Differentialgleichung.

1.8 Anregung mehrerer Maschen mit mehreren Speicherelementen.

$$\frac{C_1 \cdot C_2 \cdot R_1 \cdot R_2}{C_1 + C_2} \cdot \frac{d^2 i}{dt^2} + \left[R_1 + \frac{C_2 \cdot R_2}{C_1 + C_2} \right] \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C_1 + C_2} \cdot i(t) = \frac{C_1 \cdot C_2 \cdot R_2}{C_1 + C_2} \cdot \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{du}{dt}$$

$$a_2 \cdot \frac{d^2 i}{dt^2} + a_1 \cdot \frac{di}{dt} + a_0 \cdot i(t) = b_2 \cdot \frac{d^2 u}{dt^2} + b_1 \cdot \frac{du}{dt} = r(t)$$

Zwei Speicherelemente in zwei Maschen führen zu einer Dgl 2. Ordnung, wobei die Störfunktion (rechte Seite) die erste und zweite Ableitung der Anregung ist.

Bedingung: Die Anregung muß zweimal differenzierbar sein.

Allgemein erhält man bei der Anregung allgemeiner Netze mit konzentrierten Bauelementen

$a_n \cdot \frac{d^n i}{dt^n} + \dots + a_1 \cdot \frac{di}{dt} + a_0 \cdot i(t) = b_m \cdot \frac{d^m u}{dt^m} + \dots + b_1 \cdot \frac{du}{dt} + b_0 \cdot u(t) = r$
eine lineare Dgl n-ter Ordnung mit konstanten positiven Koeffizienten.

Die Lösung ist sehr aufwendig, da auf der rechten Seite die Störfunktion $r(t)$ nicht nur aus der Anregung $u(t)$ besteht, sondern auch aus deren Ableitungen.

Es müssen die Anfangswerte vorgegeben sein:

$$\frac{d^{n-1} i}{dt^{n-1}} \Big|_{t_0} \quad \frac{d^{n-2} i}{dt^{n-2}} \Big|_{t_0} \quad \dots \quad \frac{di}{dt} \Big|_{t_0} \quad i(t_0)$$

Je nach Art der Schaltung können die Anfangswerte abhängig voneinander sein.

1.2 Systemfrequenzfunktionen

(Hilfsmittel zur Systemanalyse)

1.2.1 Frequenzgang bei sinusförmiger Anregung

Vierpole, die aus linearen Bauelementen aufgebaut sind, lassen sich durch Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten beschreiben.

Sinusförmige Anregung (Störfunktion): $u_1(t) = U_1 \cdot \cos(\omega t)$

führt zur sinusförmigen Wirkung derselben Frequenz: $u_2(t) = U_2 \cdot \cos(\omega t)$

Die Lösung der Dgl liefert U_2 und φ_2 .

Diese Lösung kann bequemer gefunden werden, wenn für die Anregung der

komplexe Zeitaugenblickswert: $\underline{u}_1(t) = \underline{U}_1 \cdot e^{j\omega t} = U_1 \cdot e^{j\varphi_1} \cdot e^{j\omega t}$

und für die Wirkung: $\underline{u}_2(t) = \underline{U}_2 \cdot e^{j\omega t} = U_2 \cdot e^{j\varphi_2} \cdot e^{j\omega t}$

angesetzt wird.

Beispiel: RC-Tiefpaß

$$\begin{aligned}
 RC \cdot \dot{\underline{u}}_2 + \underline{u}_2 &= \underline{u}_1 \\
 j\omega \cdot \underline{U}_2 \cdot RC \cdot e^{j\omega t} + \underline{U}_2 \cdot e^{j\omega t} &= \underline{U}_1 \cdot e^{j\omega t} \\
 \underline{U}_2 \cdot e^{j\omega t} &= \frac{1}{1 + j\omega RC} \cdot \underline{U}_1 \cdot e^{j\omega t} \\
 \underline{U}_2 = U_2 \cdot e^{j\varphi_2} &= \frac{1}{1 + j\omega RC} \cdot U_1 \cdot e^{j\varphi_1} \\
 \underline{U}_2 &\sim \underline{U}_1
 \end{aligned}$$

Proportionalitätsfaktor: Übertragungsprozeß $= \frac{\text{Ausgangszeiger}}{\text{Eingangszeiger}} \equiv \underline{F}(\omega) =$

ist zeitinvariant:

Den Empfangszeiger erhält man durch Multiplikation des Frequenzgangs mit dem Sendezeiger:

$$\underline{U}_2 = \underline{F}(\omega) \cdot \underline{U}_1$$

Der Frequenzgang:

$$\underline{F}(\omega) = F(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)} \text{ hier: } \frac{1}{1 + j\omega \cdot RC}$$

beinhaltet den zeitinvarianten Teil der Systemreaktion bei sinusförmiger Anregung.

Mit dem Amplitudengang: $F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}$

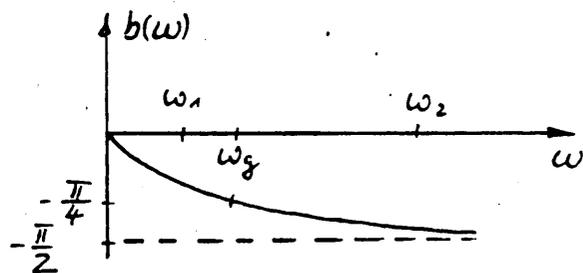
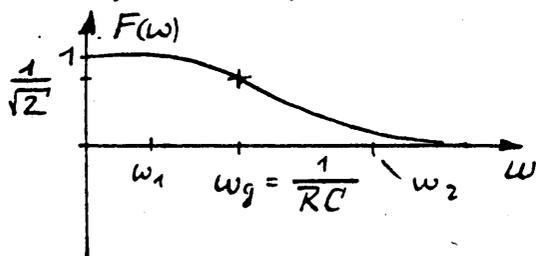
erhält man die Amplitude: $U_2 = F(\omega) \cdot U_1$

Mit dem Phasengang: $b(\omega) = -\arctan(\omega \cdot RC)$

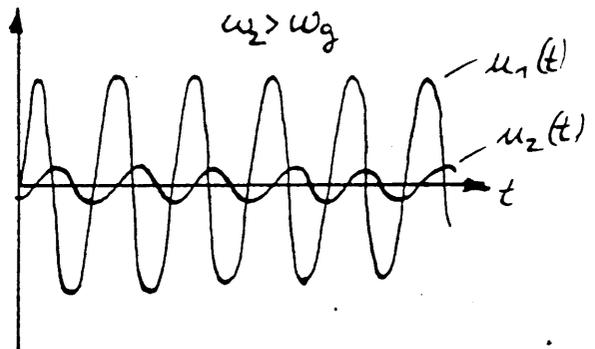
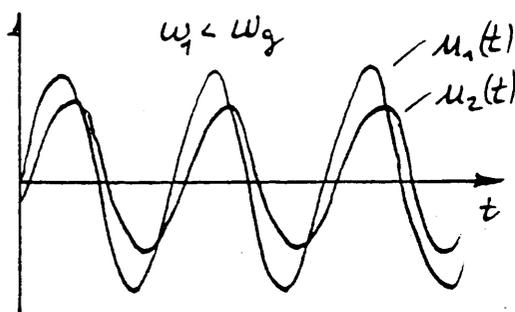
erhält man die Phase: $\varphi_2 = b(\omega) + \varphi_1$

der sinusförmigen Ausgangszeitfunktion für jede beliebige anregende Kreisfrequenz: ω .

Am Verlauf des Amplitudenganges erkennt man die Übertragungseigenschaft "Tiefpaßwirkung".



Systemreaktion im Zeitbereich:



Zusammenfassung:

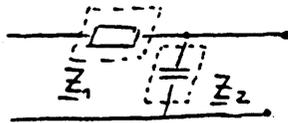
Der Frequenzgang beschreibt in Kurzfassung die Wirkung der Schaltung bei sinusf. Anregung. Hier wird die Lösung der inhomogenen DGL (gesuchte Systemreaktion) zur Lösung einer algebraischen Zeiger-Gleichung.

Die Aufstellung der inhomog. DGL bei der Analyse der Schaltung kann auch vermieden werden, wenn:

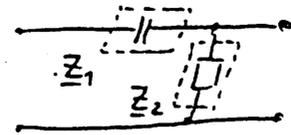
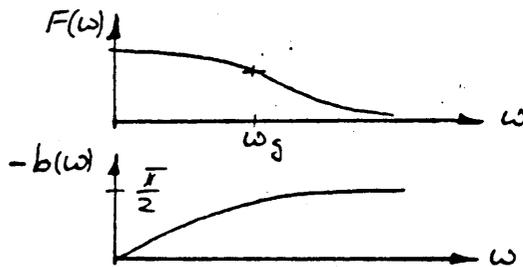
- die Bauelemente durch komplexe Widerstände ersetzt werden,
- die reellen Zeitfunktionen in den Kirchhoff'schen Gleichungen durch komplexe Zeiger ersetzt werden.

Die Systemfrequenzfunktion lässt sich bei gegebener Schaltung durch Einführen des komplexen Widerstandes unter Verwendung der Rechenregeln für komplexe Zahlen leicht finden.

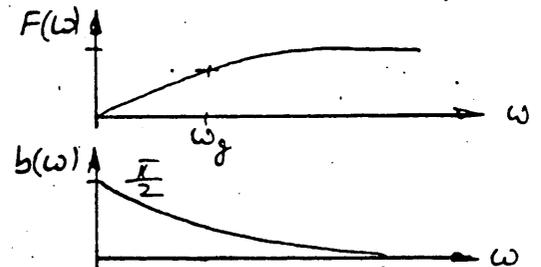
Beispiele:



$$F(\omega) = \frac{Z_2}{Z_2 + Z_1} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$



$$F(\omega) = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}$$



Na. U. Transfer zum Frequenzgang einer Schaltung.

erste Darstellungsform einer Dauererschwingung:

Realteil eines rotierenden Zeigers: $u_1(t) = \operatorname{Re}\{\underline{u}_1(t)\}$

zweite Darstellungsform einer Dauererschwingung:

Addition von zwei rotierenden Zeigern:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= U_{1a} \cdot \cos(\omega t + \varphi_1) = U_{1a} \cdot \frac{1}{2} [e^{j(\omega t + \varphi_1)} + e^{-j(\omega t + \varphi_1)}] \\ &= \frac{1}{2} U_{1a} \cdot e^{j\varphi_1} \cdot e^{j\omega t} + \frac{1}{2} U_{1a} \cdot e^{-j\varphi_1} \cdot e^{-j\omega t} \\ &= \frac{1}{2} \underline{U}_{1a} \cdot e^{j\omega t} + \frac{1}{2} \underline{U}_{1a}^* \cdot e^{-j\omega t} \end{aligned}$$

$$u_1(t) = \frac{1}{2} \underline{u}_1(t) + \frac{1}{2} \underline{u}_1^*(t) \quad \text{Anregung}$$

$$u_2(t) = \frac{1}{2} \underline{u}_2(t) + \frac{1}{2} \underline{u}_2^*(t) \quad \text{erwartete Wirkung}$$

Es gilt für das Übertragungsverhalten der RC-Schaltung

$$RC \cdot \dot{u}_2 + u_2 = u_1$$

$$\begin{aligned} \text{wegen: } \operatorname{Re}\{\underline{u}_1(t)\} &= U_{1a} \cdot \cos(\omega t + \varphi_1) & \text{wegen: } \operatorname{Re}\{\underline{u}_1^*(t)\} &= U_{1a} \cdot \cos(-\omega t + \varphi) \\ &= u_1(t) & &= U_{1a} \cdot \cos(\omega t + \varphi_1) = u_1 \end{aligned}$$

$$\text{folgt: } RC \cdot \dot{u}_2 + u_2 = u_1$$

$$\text{folgt mit: } RC \cdot \dot{u}_2^* + u_2^* = u_1^*$$

$$j\omega \cdot RC \cdot \underline{u}_2 \cdot e^{j\omega t} + \underline{u}_2 \cdot e^{j\omega t} = \underline{u}_1 \cdot e^{j\omega t}$$

$$-j\omega \cdot RC \cdot \underline{u}_2^* \cdot e^{-j\omega t} + \underline{u}_2^* \cdot e^{-j\omega t} = \underline{u}_1^* \cdot e^{-j\omega t}$$

$$j(\omega)RC \cdot \underline{u}_2 + \underline{u}_2 = \underline{u}_1$$

$$j(-\omega)RC \cdot \underline{u}_2^* + \underline{u}_2^* = \underline{u}_1^*$$

$$\underline{u}_2 = \frac{1}{1 + j(\omega)RC} \cdot \underline{u}_1$$

$$\underline{u}_2^* = \frac{1}{1 + j(-\omega)RC} \cdot \underline{u}_1^*$$

$$\underline{u}_2 = F(+\omega) \cdot \underline{u}_1$$

$$\underline{u}_2^* = F(-\omega) \cdot \underline{u}_1^*$$

$$|\underline{u}_2| \cdot e^{j\varphi_2} = |F(+\omega)| \cdot e^{j b(+\omega)} \cdot |\underline{u}_1| \cdot e^{j\varphi_1}$$

$$|\underline{u}_2^*| \cdot e^{-j\varphi_2} = |F(-\omega)| \cdot e^{j b(-\omega)} \cdot |\underline{u}_1^*| \cdot e^{-j\varphi_1}$$

$$u_2 = |F(+\omega)| \cdot u_1 \quad \text{I}$$

$$u_2 = |F(-\omega)| \cdot u_1$$

$$\varphi_2 = b(+\omega) + \varphi_1 \quad \text{II}$$

$$-\varphi_2 = b(-\omega) - \varphi_1$$

Aus I folgt: $|F(\omega)| = |F(-\omega)|$ gerade symmetrisch

Aus II folgt: $b(\omega) = -b(-\omega)$ ungerade symmetrisch

2. Laplace - Transformation

2.1 Transformation von Zeitfunktionen

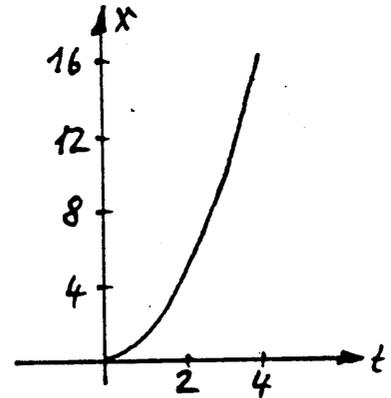
Funktionsbegriff:

Eine Vorschrift, die jeder Zahl t nur eine neue Zahl x zuordnet, nennt man Funktion f .

Zuordnung:

t	0	1	2	3	4
x	0	1	4	9	16

Vorschrift: $x = f(t) = t^2$



Funktionaltransformation:

Eine Vorschrift, die jeder Funktion $x = f(t)$ in einem Intervall $a \leq t \leq b$ eine "Zahl" y zuordnet, nennt man Funktionaltransformation T .

Vorschrift: $y = T[x]$

Die "Zahl" y liegt im Bildraum. Grundgedanke: Alle Funktionen x sollen durch die Funktionaltransformation im Bildraum als unterscheidbare "Zahlen" erscheinen.

2.2 Integraltransformation

Die Objektfunktion (Originalfunktion) $x = f(t)$

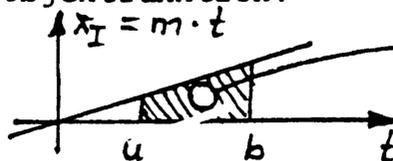
wird über die Vorschrift $T = \int \dots$

als "Zahl" y im Bildbereich darstellt. $y = T[x] = \int_a^b [f(t)] dt$

Vorteil: Der gesamte Funktionsverlauf in einem Zeitintervall wird durch seinen Flächenwert charakterisiert.

1. Beispiel: Eine Geradenfunktion $x_I(t)$ mit bestimmter Steigung m

Objektfunktion:



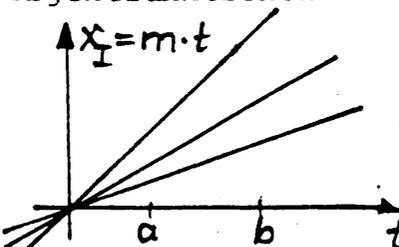
im Bildbereich: eine "Zahl" y_I

$$\int_a^b [m \cdot t] dt = \frac{m}{2} \cdot [b^2 - a^2]$$

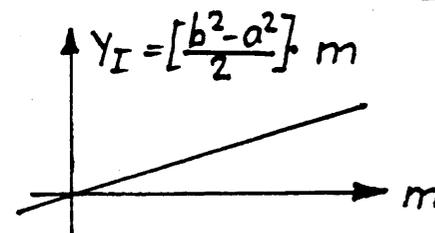


Alle Geradenfunktionen $x(t)$ mit beliebigen Steigungen m

Objektfunktionen:



im Bildbereich: eine best. Funkt. $y_I(m)$



Geradenschar im Intervall $[a, b]$

mit einem Parameter m

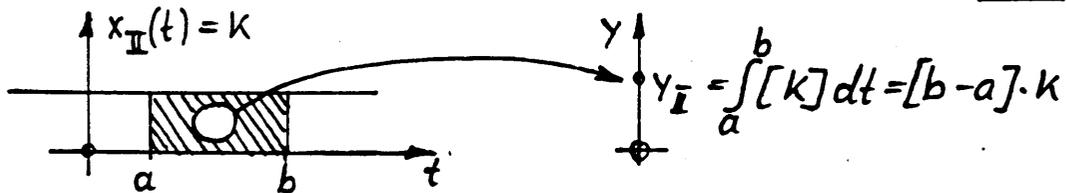
im Objektbereich

wird als Gerade mit Steigung $[\frac{b^2 - a^2}{2}]$ im Bildbereich abgebildet.

2. Beispiel: Eine Konstante $x(t)$ mit einem bestimmten Wert k

Objektfunktion:

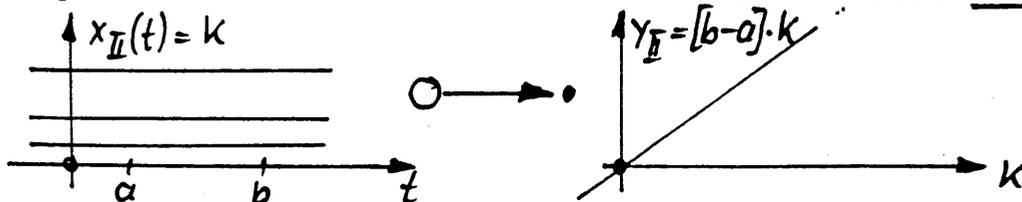
im Bildbereich: eine "Zahl" y_{I}



Alle Objektfunktionen $x(t)$ mit beliebigen Konstanten k

Objektfunktionen:

im Bildbereich: eine best. Funkt. $y(k)$



Konstantenschar im

wird als Gerade mit der Steigung $[b-a]$

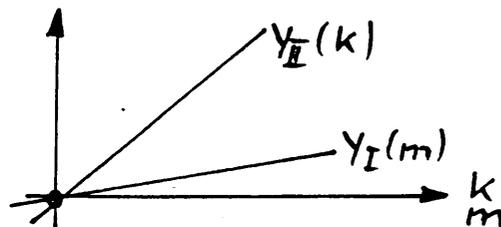
Intervall $a \leq t \leq b$ mit einem

im Bildbereich abgebildet.

Parameter k im Objektbereich

Objektfunktionsklassen im selben Zeitintervall $a \leq t \leq b$ werden im Bildbereich durch unterschiedliche Funktionen dargestellt.

1. und 2. Beispiel:



Man erhält so eine (eindeutige) Zuordnung von Objektfunktionen zu einzelnen Bildpunkten.

Das funktioniert hier nicht für das Zeitintervall: $a = 0 \leq t \leq b = \infty$

da: $y_{\text{I}} = y_{\text{II}} = \infty$ würde.

Um eine Objektfunktion $f(t)$ im gesamten Zeitintervall $[0, \infty]$

als Zahl im Bildbereich darstellen zu können, muß das

Integral $\int_0^{\infty} |f(t)| dt < \infty$ existieren.

D.h. nicht alle $f(t)$ können transformiert werden.

2.3 Integraltransformation mit Dämpfungsfaktor als Kern.

Die Objektfunktion $f(t)$ wird mit einem "Dämpfungsfaktor" multipliziert: $e^{-\sigma \cdot t}$

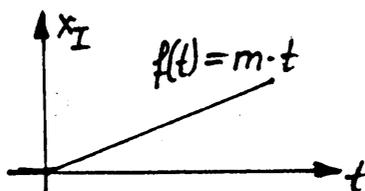
Die Fläche unter dieser neuen Funktion: $f_b(t) = f(t) \cdot e^{-\sigma \cdot t}$ ist dann im ganzen Zeitintervall $[0, \infty]$ endlich!

(Das uneigentliche Integral ist konvergent)

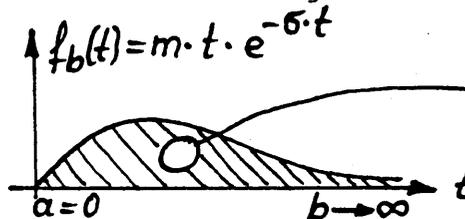
Voraussetzung: $f(t) = 0$ für $(t) < 0$, damit $e^{-\sigma t}$ "dämpfen" kann!

1. Beispiel:

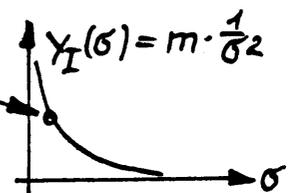
Objektfunktion:



modifizierte Objektfunktion:

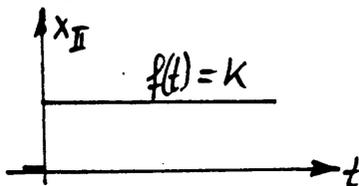


im Bildbereich:

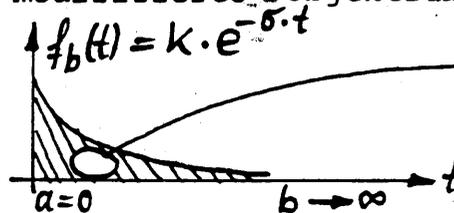


2. Beispiel:

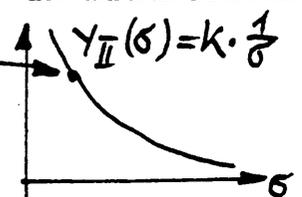
Objektfunktion:



modifizierte Objektfunktion:



im Bildbereich:



Abhängig von dem Parameter σ im "Dämpfungsfaktor" $e^{-\sigma \cdot t}$ der auch Kern (σ, t) genannt wird, kann eine Objektfunktionsklasse $f(t)$, die Null ist für $t < 0$, für das gesamte Zeitintervall $[0, \infty]$ im Bildbereich in eine Bildfunktion $y = F_b(\sigma)$ transformiert werden.

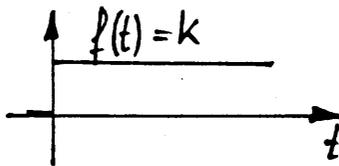
$$F_b(\sigma) = \int_0^{\infty} \underbrace{\text{Kern}(\sigma, t)}_{\text{mod. Objektfkt.}} \cdot \underbrace{f(t)}_{\text{Objektfkt.}} dt$$

Bildfunktion = Transformationsergebnis

$$F_b(\sigma) \longleftrightarrow f_b(t)$$

2.4 Integraltransformation mit gedämpfter Schwingung als Kern.

Objektfunktion:



modifizierte Objektfunktion:

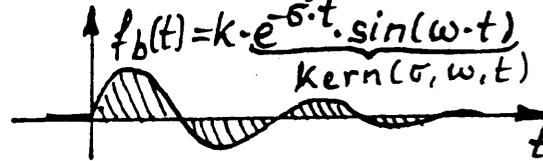
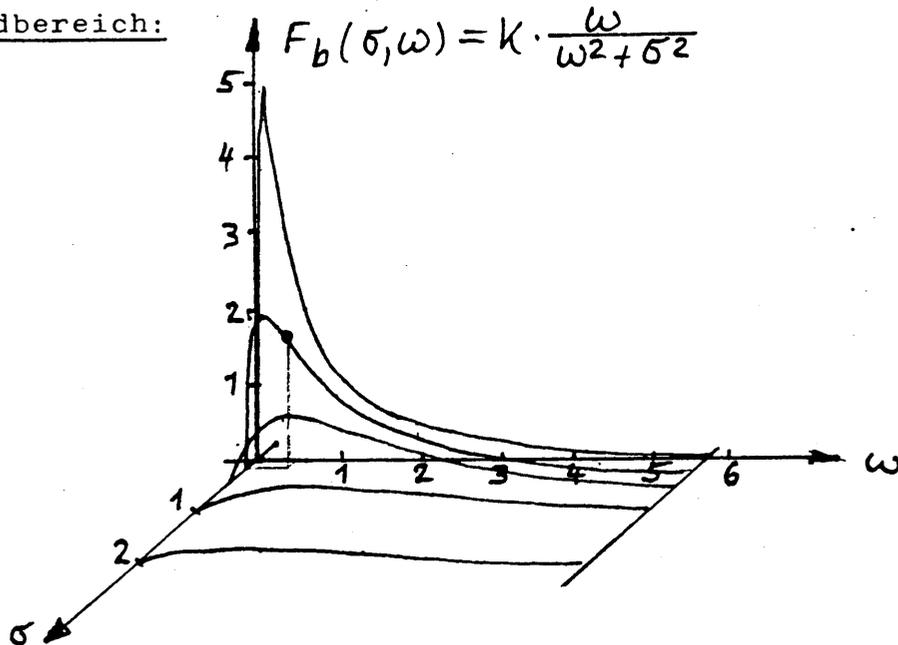
Bildbereich:

Tabelle:

$\omega \backslash \sigma$	0,01	0,05	0,1	0,2	0,5	1	2	5
1,0	0,01	0,05	0,1	0,2	0,4	0,5	0,4	0,2
0,1	1,0	4,0	5,0	4,0	1,9	1,0	0,5	0,2
0,5	0,04	0,2	0,4	0,7	1,0	0,8	0,5	0,2
2,0	0,002	0,01	0,02	0,05	0,1	0,2	0,25	0,17
0,2	0,25	1,2	2,0	2,5	1,7	1,0	0,5	0,2

2.5 Integraltransformation mit komplexem Kern.

Kern $(p, t) = e^{-pt} = e^{-(\sigma + j\omega)t}$ Drehstrecker)

Diese Integraltransformation: $F_D(p) = \int_0^{\infty} \text{Kern}(p, t) \cdot f(t) dt = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} f_b(t) dt$

einfachere Schreibweise:

$$F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\} \equiv \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt$$

nennt man Laplace-Transformation.

Voraussetzung $f(t < 0) = 0$

Mit dieser Funktionaltransformation kann man Differentialgleichungen im Bildbereich direkt nach der unbekannt gesuchten Wirkung auflösen.

Vorteil der Transformation:

Zeitfunktionen, deren Augenblickswerte oft wenig Zusammenhang aufweisen (Sprungfunktion), werden durch die Transformation stetige Funktionen, deren Werte klaren Gesetzmäßigkeiten unterworfen sind.

Existiert das Integral: $\int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt < \infty$
so sagt man, es ist konvergent.

Existiert sogar:

$$\int_0^{\infty} |f(t) \cdot e^{-pt}| dt = \int_0^{\infty} |f(t)| \cdot e^{-\sigma t} dt < \infty$$

so nennt man es absolut konvergent.

Der dafür notwendige Konvergenzbereich für p wird nachfolgend angegeben.

$F(p)$ ist im absoluten Konvergenzbereich eine holomorphe Funktion, d.h. komplex differenzierbar.

Der Konvergenzbereich garantiert für eine beliebige Zeitfunktion $f(t)$ die Existenz einer Laplace-Transformierten $F(p)$.

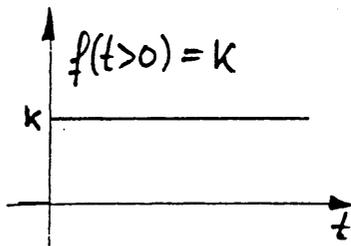
Die Zeitfunktion $f(t)$ wird im Bildbereich durch die sie kennzeichnende "Zahl" F dargestellt.

F ist "des Pudels Kern" von $f(t)$

2.6 Die Laplace-Transformierte.

Berechnung einiger Bildfunktionen. (Kennzeichnende "Zahl" von $f(t)$)

2.6.1 Sprungfunktion: Korrespondenz: $k \cdot 0 \longrightarrow k \cdot \frac{1}{p}$



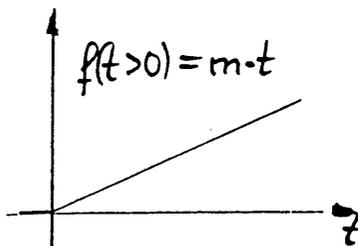
(Zuordnung)

$$F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} k \cdot e^{-p \cdot t} dt = -\frac{1}{p} \cdot k \cdot e^{-p \cdot t} \Big|_0^{\infty}$$

$$= -\frac{1}{p} \cdot k \cdot [e^{-p \cdot \infty} - e^{-p \cdot 0}]$$

$$= \frac{1}{p} \cdot k$$

2.6.2 Rampe:



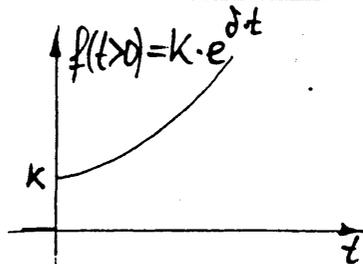
Korrespondenz: $m \cdot t \cdot 0 \longrightarrow m \cdot \frac{1}{p^2}$

$$F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} m \cdot t \cdot e^{-p \cdot t} dt = m \cdot e^{-p \cdot t} \cdot \frac{-p \cdot t - 1}{p^2} \Big|_0^{\infty}$$

$$= \frac{m}{p^2} \cdot [e^{-p \cdot \infty} \cdot (-p \cdot \infty - 1) - e^{-p \cdot 0} \cdot (-p \cdot 0 - 1)]$$

$$= m \cdot \frac{1}{p^2}$$

2.6.3 Exponentialfunktion: Korrespondenz: $k \cdot e^{\delta \cdot t} \cdot 0 \longrightarrow k \cdot \frac{1}{p - \delta}$



$$F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} k \cdot e^{\delta \cdot t} \cdot e^{-p \cdot t} dt = \frac{k}{\delta - p} \cdot e^{(\delta - p) \cdot t} \Big|_0^{\infty}$$

$$= \frac{k}{\delta - p} [e^{(\delta - p) \cdot \infty} - e^{(\delta - p) \cdot 0}]$$

$$= k \cdot \frac{1}{p - \delta}$$

Bemerkung zum Dirac-Stoß:

Der Verlauf der Stoß-"Funktion" ist nicht als Formel gegeben.

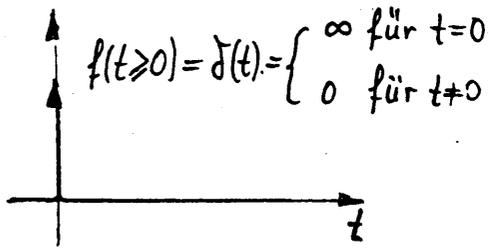
Es sind nur zwei Werte dieser "Funktion" bekannt:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{für } -0 < t < +0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Für die Fläche unter der "Funktion" gilt: $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt \equiv 1$ [dimensionslos]

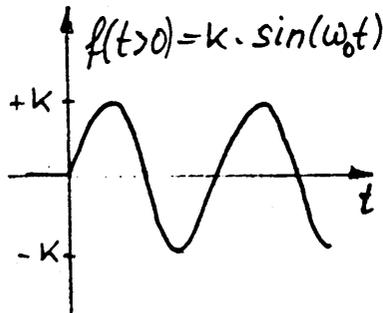
D.h. die "Funktion" $\delta(t)$ ist über ihr Integral definiert.

Die Dimension der "Funktion" ist somit: $[\frac{1}{s}]$, wenn die unabhängige Variable, die Zeit t , die Dimension $[s]$ hat.

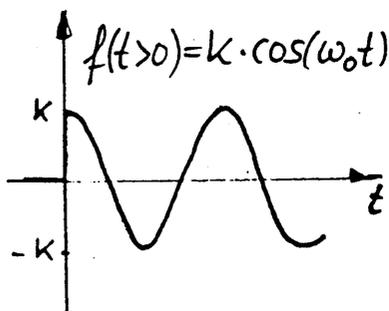
2.6.4 Dirac-Stoß:Korrespondenz: $\delta(t) \circ \longrightarrow 1$ $k \cdot \delta(t) \circ \longrightarrow k$

$$\begin{aligned} F(p) &= \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-p \cdot t} dt \\ &= \int_{-0}^{+0} 1 \cdot \delta(t) + \int_{+0}^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-p \cdot t} dt \\ &= 1 + 0 = 1 \end{aligned}$$

(Erklärung in 4.3.3.1)

2.6.5 Sinusfunktion:Korrespondenz: $k \cdot \sin(\omega_0 t) \circ \longrightarrow \frac{k \cdot \omega_0}{p^2 + \omega_0^2}$

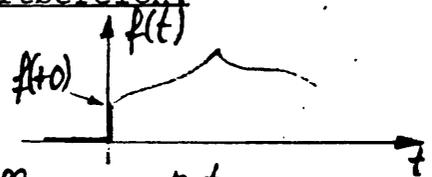
$$\begin{aligned} F(p) &= \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} k \cdot \sin(\omega_0 t) \cdot e^{-p \cdot t} dt \\ &= \frac{k \cdot e^{-p \cdot t}}{p^2 + \omega_0^2} \cdot [-p \cdot \sin(\omega_0 t) - \omega_0 \cdot \cos(\omega_0 t)] \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{k}{p^2 + \omega_0^2} \left[e^{-p \cdot \infty} \cdot (-p \cdot \sin(\omega_0 \cdot \infty) - \omega_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot \infty)) \right. \\ &\quad \left. - e^{-p \cdot 0} \cdot (-p \cdot \sin(\omega_0 \cdot 0) - \omega_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot 0)) \right] \\ &= \frac{k \cdot \omega_0}{p^2 + \omega_0^2} \end{aligned}$$

2.6.6 Kosinusfunktion:Korrespondenz: $k \cdot \cos(\omega_0 t) \circ \longrightarrow \frac{k \cdot p}{p^2 + \omega_0^2}$

$$\begin{aligned} F(p) &= \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} k \cdot \cos(\omega_0 t) \cdot e^{-p \cdot t} dt \\ &= \frac{k \cdot e^{-p \cdot t}}{p^2 + \omega_0^2} \cdot [-p \cdot \cos(\omega_0 t) + \omega_0 \cdot \sin(\omega_0 t)] \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{k}{p^2 + \omega_0^2} \left[e^{-p \cdot \infty} \cdot (-p \cdot \cos(\omega_0 \cdot \infty) + \omega_0 \cdot \sin(\omega_0 \cdot \infty)) \right. \\ &\quad \left. - e^{-p \cdot 0} \cdot (-p \cdot \cos(\omega_0 \cdot 0) + \omega_0 \cdot \sin(\omega_0 \cdot 0)) \right] \\ &= \frac{k \cdot p}{p^2 + \omega_0^2} \end{aligned}$$

2.7 Rechenregeln.2.7.1 Gewöhnliche Differentiation im Zeitbereich.

Voraussetzung: $f(t > 0)$ differenzierbar
und stetig, d.h. keine Sprünge!
 $f(t = 0)$ kann Sprungstellen aufweisen.



$$f'(t) \equiv \frac{df(t)}{dt} \quad \text{für } t > 0$$

Wenn: $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \cdot e^{-p \cdot t} = 0$
und $f(+0)$ endlich ist,
folgt:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f'(t)\} &= \int_0^{\infty} f'(t) \cdot e^{-p \cdot t} dt \\ &= e^{-p \cdot t} \cdot f(t) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} f(t) \cdot [-p \cdot e^{-p \cdot t}] dt \\ &= -f(+0) + p \cdot \mathcal{L}\{f(t)\} = p \cdot F(p) - f(+0) \end{aligned}$$

Beispiele:

Es war: $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p) = \frac{m}{p^2}$
 $f(+0) = 0$

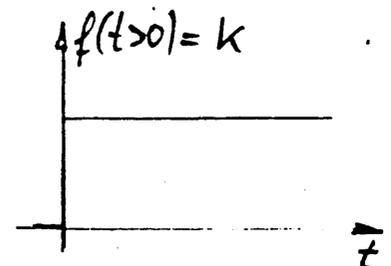
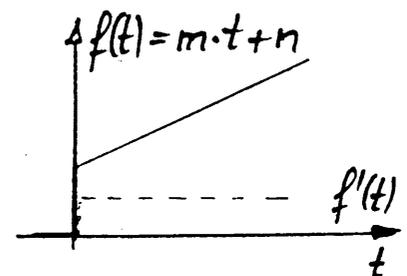
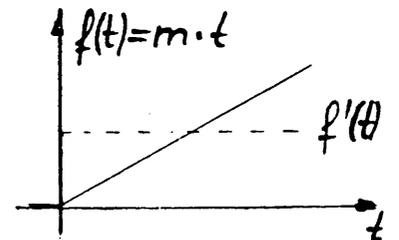
Es folgt: $\mathcal{L}\{f'(t)\} = p \cdot F(p) - f(+0)$
 $= p \cdot \frac{m}{p^2} - 0 = \frac{m}{p}$

Es ist: $\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{m \cdot t\} + \mathcal{L}\{n\}$
 $= \frac{m}{p^2} + \frac{n}{p}$

Es folgt: $\mathcal{L}\{f'(t)\} = p \cdot \left[\frac{m}{p^2} + \frac{n}{p} \right] - n$
 $= \frac{m}{p}$

aber: es war: $\mathcal{L}\{f(t)\} = k \cdot \frac{1}{p}$
 $f(+0) = k$

Es folgt: $\mathcal{L}\{f'(t)\} = p \cdot \frac{k}{p} - k$
 $= 0$



d.h. der Dirac-Stoß bei $t = 0$ kann nicht erfaßt werden,
sondern nur für $t > 0$!

2.7.2 Allgemeine Differentiation im Zeitbereich.

Voraussetzung: $f(t > 0)$ kann Sprungstellen aufweisen.

$$f(t) = f(t) + [\Delta f] \cdot \sigma(t)$$

mit Sprung = ohne Sprung + Sprunghöhe \times Einheitssprung

$$\dot{f}(t) = f'(t > 0) + [f(+0) - f(-0)] \cdot \delta(t)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\dot{f}(t)\} &= \mathcal{L}\{f'(t)\} + [f(+0) - f(-0)] \cdot \mathcal{L}\{\delta(t)\} \\ &= p \cdot F(p) - f(+0) + [f(+0) - f(-0)] \cdot 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{L}\{\dot{f}(t)\} = p \cdot F(p) - f(-0)}$$

Setze für $f(t) \rightarrow \dot{f}(t)$ und für $\dot{f}(t) \rightarrow \ddot{f}(t)$

so folgt:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\dot{f}(t)\} &= p \cdot \mathcal{L}\{f(t)\} - f(-0) \\ &= p \cdot [p \cdot F(p) - f(-0)] - f'(-0) \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}\{\ddot{f}(t)\} = p^2 \cdot F(p) - p \cdot f(-0) - f'(-0)$$

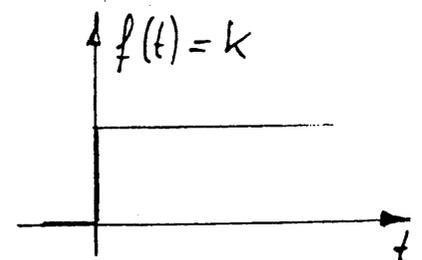
Vergangenheitswert $\neq 0$

entspricht der Energie des technischen Systems.

Beispiel:

Es war: $\mathcal{L}\{f(t)\} = k \cdot \frac{1}{p}$
 $f(-0) = 0$

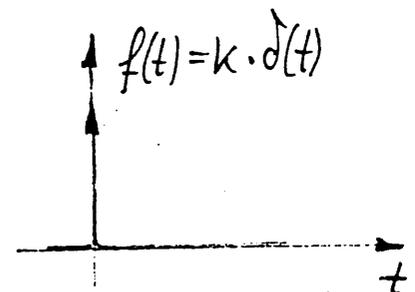
Es folgt: $\mathcal{L}\{\dot{f}(t)\} = p \cdot k \cdot \frac{1}{p} - 0$
 $= k$



d.h. die Laplace-Transformierte des Dirac-Stoßes kann bei $t = 0$ erfaßt werden.

Es war: $\mathcal{L}\{f(t)\} = k$
 $f(-0) = 0$

Es folgt: $\mathcal{L}\{\dot{f}(t)\} = p \cdot k - 0$
 $= p \cdot k$



d.h. die Laplace-Transformierte des differenzierten Dirac-Stoßes existiert !

2.7.3 Integration im Zeitbereich.

Voraussetzung: Es existiert: $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$.

$$f^{(k)}(t) \equiv \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^0 f(\tau) d\tau + \int_0^t f(\tau) d\tau = f^{(k-1)}(-0) - f^{(k-1)}(-\infty) + \int_0^t f(\tau) d\tau$$

Wenn: $f^{(k-1)}(-\infty) = 0$, d.h. weit draußen ist die Energie Null

und: $f^{(k-1)}(-0)$ endlich ist,

folgt:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f^{(k)}(t)\} &= \mathcal{L}\{f^{(k-1)}(-0)\} - 0 + \int_0^{\infty} \left[\int_0^t f(\tau) d\tau \right] \cdot e^{-p \cdot t} dt \\ &= \mathcal{L}\{f^{(k-1)}(-0)\} + \left[\frac{1}{p} \cdot e^{-p \cdot t} \cdot \int_0^t f(\tau) d\tau \right] \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{1}{p} \cdot e^{-p \cdot t} \cdot f(t) dt \end{aligned}$$

Wenn: $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-p \cdot t} \cdot \int_0^t f(\tau) d\tau = 0$

folgt:

$$\mathcal{L}\{f^{(k)}(t)\} = \mathcal{L}\{f^{(k-1)}(-0)\} + \frac{1}{p} \cdot \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-p \cdot t} dt$$

$$\boxed{\mathcal{L}\{f^{(k)}(t)\} = \frac{1}{p} \cdot F(p) + \frac{1}{p} \cdot f^{(k-1)}(-0)}$$

Vergangenheitswert

Beispiel:

Es war:

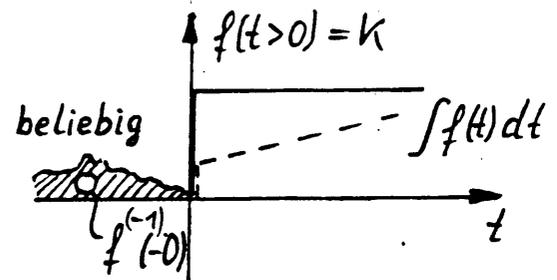
$$\mathcal{L}\{f(t)\} = k \cdot \frac{1}{p}$$

Es sei:

$$f^{(k-1)}(-0) = \int_{-\infty}^0 f(\tau) d\tau = k_0$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right\} &= \frac{1}{p} \cdot k \cdot \frac{1}{p} + \frac{1}{p} \cdot k_0 \\ &= k \cdot \frac{1}{p^2} + k_0 \cdot \frac{1}{p} \end{aligned}$$

Beispiel:

mit:

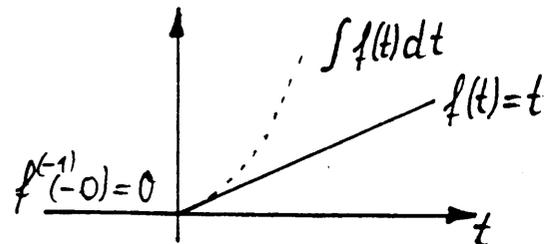
$$f(t) = t \quad \circ \longrightarrow \quad F(p) = \frac{1}{p^2}$$

folgt:

$$\mathcal{L}\left\{\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p} \cdot 0$$

d.h.:

$$\frac{1}{2} \cdot t^2 \quad \circ \longrightarrow \quad \frac{1}{p^3}$$



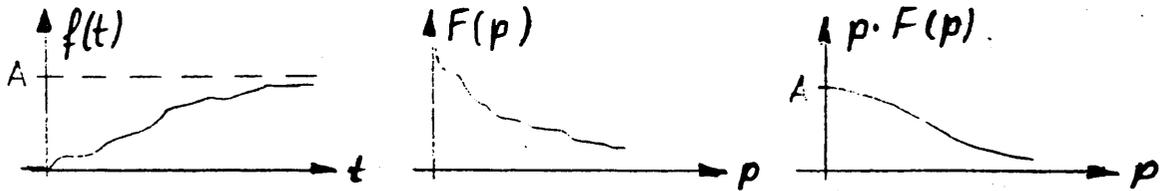
durch weitere Integrationen erhält man die Korrespondenzen:

$$\frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \quad \circ \longrightarrow \quad \frac{1}{p^k}$$

2.7.4 Weitere Hilfssätze.

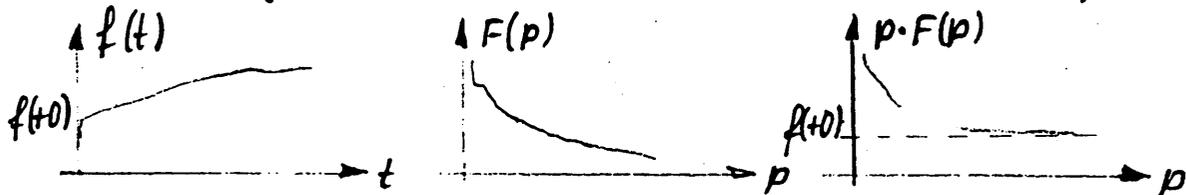
2.7.4.1 Endwertsatz.

Existiert: $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$, so gilt: $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot F(p)$



2.7.4.2 Anfangswertsatz.

Existiert: $\lim_{t \rightarrow 0} f(t)$, so gilt: $\lim_{t \rightarrow 0} f(+0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} p \cdot F(p)$



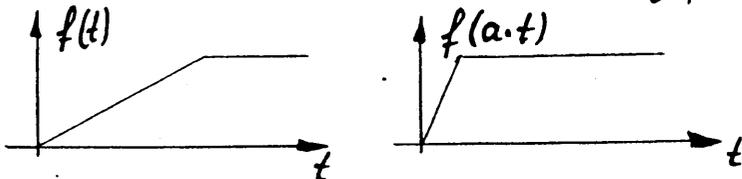
2.7.4.3 Asymptotisches Verhalten.

Ist $f(t)$ frei von Dirac-Stößen, so gilt: $\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = 0$.

2.7.4.4 Ähnlichkeitssatz.

Mit: $f(t) \leftrightarrow F(p)$, folgt:

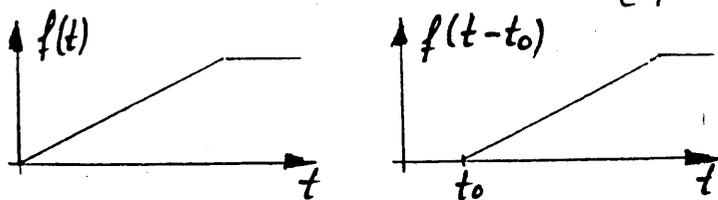
$$\mathcal{L}\{f(a \cdot t)\} = \frac{1}{a} \cdot F\left(\frac{p}{a}\right)$$



2.7.4.5 Verschiebungssatz.

Mit: $f(t) \leftrightarrow F(p)$, folgt:

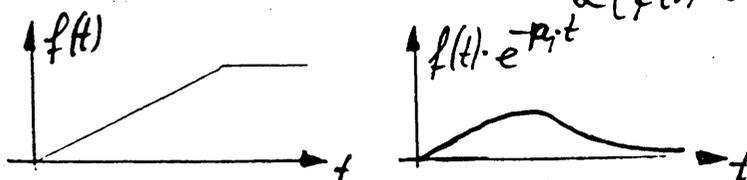
$$\mathcal{L}\{f(t-t_0)\} = e^{-p \cdot t_0} \cdot F(p)$$



2.7.4.6 Dämpfungssatz.

Mit: $f(t) \leftrightarrow F(p)$, folgt:

$$\mathcal{L}\{f(t) \cdot e^{-p_1 \cdot t}\} = F(p+p_1)$$

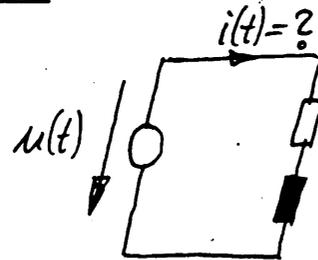


2.8 Lösung der Differentialgleichung im Bildbereich.

2.8.1 Differentialgleichung 1. Ordnung:

$$L \cdot \frac{di}{dt} + R \cdot i(t) = u(t)$$

Beispiel 1.4



Transformation in den
Bildbereich unter Anwen-
dung der Rechenregeln.

$$L \cdot \mathcal{L}\left\{\frac{di}{dt}\right\} + R \cdot \mathcal{L}\{i(t)\} = \mathcal{L}\{u(t)\}$$

$$L \cdot [p \cdot \mathcal{F}(p) - i(-0)] + R \cdot \mathcal{F}(p) = U(p)$$

$$\mathcal{F}(p) \cdot [p \cdot L + R] = U(p) + L \cdot i(-0)$$

$$\mathcal{F}(p) = \frac{1}{R + p \cdot L} [U(p) + L \cdot i(-0)]$$

Gesuchte Wirkung (explizit)

erhalten wir durch Lösung
der algebraischen Gleichung
im Bildbereich.

Das ist einfacher als die
Lösung der Differentialgleichung
im Originalbereich !

äußere
Anregung

innere

Anregung durch die
Vorgeschichte (hier:
magnetisches Feld der
Spule $\hat{=}$ gespeicherte
Energie).

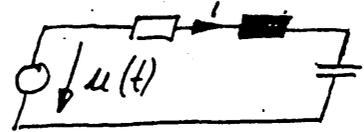
$$\left[\begin{array}{l} \text{kennzeichnende} \\ \text{Zahl der} \\ \text{Wirkung} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{l} \text{kennz. Zahl} \\ \text{der} \\ \text{Schaltung} \end{array} \right] \times \left[\begin{array}{l} \text{kennz. Zahl} \\ \text{der äusseren} \\ \text{Anregung} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{l} \text{kennz. Zahl} \\ \text{der inneren} \\ \text{Anregung} \end{array} \right]$$

Hier:
$$\mathcal{F}(p) = \frac{1}{R + pL} \times [U(p) + L \cdot i(-0)]$$

2.8.3 Integro-Differentialgleichungen.

Beispiel 1.7

$$L \cdot \frac{di}{dt} + R \cdot i(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt = u(t)$$



Transformation in den Bildbereich:

$$L \cdot [p \cdot \mathcal{I}(p) - i(-0)] + R \cdot \mathcal{I}(p) + \frac{1}{C} \left[\frac{1}{p} \cdot \mathcal{I}(p) + \frac{1}{p} \cdot i^{(-1)}(-0) \right] = U(p)$$

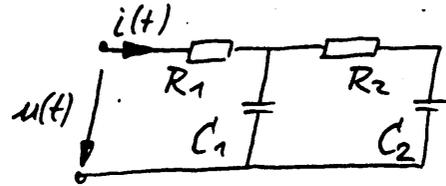
$$\mathcal{I}(p) \cdot \left[p \cdot L + R + \frac{1}{p \cdot C} \right] = \underbrace{U(p)}_{\substack{\text{äußere} \\ \text{Anregung}}} + \underbrace{L \cdot i(-0) - \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{C} \cdot i^{(-1)}(-0)}_{\substack{\text{innere Anregung} \\ = U_C(-0)}}$$

$$\mathcal{I}(p) = \frac{1}{p \cdot L + R + 1/pC} \times \left[U(p) + L \cdot i(-0) - \frac{1}{p} \cdot U_C(-0) \right]$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{kennz. Zahl} \\ \text{der} \\ \text{Wirkung} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{l} \text{kennz. Zahl} \\ \text{der} \\ \text{Schaltung} \end{array} \right] \times \left[\begin{array}{l} \text{kennz. Zahl} \\ \text{der äusseren} \\ \text{Anregung} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{l} \text{kennz. Zahl} \\ \text{der gespeicherten} \\ \text{Energie} \end{array} \right]$$

2.8.4 Energiefreies allgemeines Netzwerk. Beispiel 1.8

Es sind die Dgl und die Integro-Dgl im Bildbereich identisch, da die Anfangsbedingungen und die Anfangswerte Null sind.



$$a_2 \cdot \frac{d^2 i}{dt^2} + a_1 \cdot \frac{di}{dt} + a_0 \cdot i(t) = b_2 \frac{d^2 u}{dt^2} + b_1 \cdot \frac{du}{dt}$$

Transformation in den Bildbereich.

$$a_2 \cdot p^2 \cdot \mathcal{I}(p) + a_1 \cdot p \cdot \mathcal{I}(p) + a_0 \cdot \mathcal{I}(p) = b_2 \cdot p^2 \cdot \mathcal{U}(p) + b_1 \cdot p \cdot \mathcal{U}(p)$$

$$\mathcal{I}(p) = \frac{b_2 \cdot p^2 + b_1 \cdot p}{a_2 \cdot p^2 + a_1 \cdot p + a_0} \cdot \mathcal{U}(p)$$

$$\mathcal{I}(p) = \frac{1}{Z(p)} \cdot \mathcal{U}(p)$$

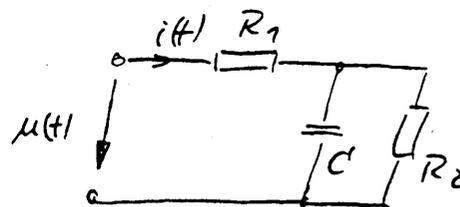
Für energiefreie Zweipole gilt im Bildbereich:

Die Laplace-Transformierte der Anregung $\mathcal{U}(p)$ multipliziert mit dem "Wechselstrom-Leitwert" [wobei $(j\omega) \rightarrow (p)$] ergibt die Laplace-Transformierte der Wirkung $\mathcal{I}(p)$.
D.h. die Lösung der Differentialgleichung im Zeitbereich erscheint im Bildbereich als eine Multiplikation.

Beispiel

(siehe Beispiel 1.6 bzw. 2.8.3)

Schaltung:



kennzeichnende Zahl
der Schaltung:

$$Z(\omega) = R_1 + \frac{R_2}{1 + j\omega C R_2}$$

$$Z(p) = R_1 + \frac{R_2}{1 + p C R_2}$$

$$\frac{1}{Z(p)} = \frac{1 + p C R_2}{R_1 + R_2 + p C R_1 R_2}$$

kennzeichnende Zahl
der Wirkung:

$$\mathcal{I}(p) = \frac{1}{Z(p)} \cdot \mathcal{U}(p)$$

1.2.3 Übertragungsfunktion bei Sprunganregung

Es werden die Rechenregeln der Laplace-Transformation auf die das System beschreibende Dgl angewendet.

Beispiel: RC-Tiefpaß

$$R \cdot C \cdot \dot{u}_2 + u_2 = u_1$$

$$p \cdot R \cdot C \cdot U_2(p) + U_2(p) = U_1(p)$$

$$U_2(p) = \frac{1}{1 + p \cdot RC} \cdot U_1(p)$$

$$U_2(p) \sim U_1(p)$$

Proportionalitätsfaktor: Übertragungsprozeß = $\frac{\text{Ausgangsfunktion}}{\text{Eingangsfunktion}} = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} \equiv 1$
 ist zeitinvariant:

Die Übertragungsfunktion $F(p)$ ist identisch mit dem transformierten Frequenzgang $F(j\omega = p)$, falls keine Anfangsbedingungen zu berücksichtigen sind.

Die Laplace-Transformierte der Empfangszeitfunktion erhält man durch Multiplikation des transformierten Frequenzgangs $F(j\omega = p)$ mit der Laplace-Transformierten der Sendezeitfunktion:

$$U_2(p) = F(p) \cdot U_1(p)$$

$$\mathcal{L}\{u_2(t)\} = F(p) \cdot \mathcal{L}\{u_1(t)\}$$

Sonderfall: Sendezeitsignal ist der Sprung:

$$u_1(t) \triangleq s(t) \longrightarrow \frac{1}{p}$$

$$\mathcal{L}\{u_2(t)\} = F(p) \cdot \frac{1}{p}$$

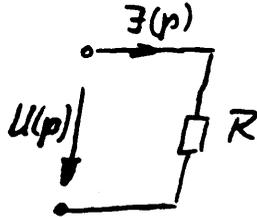
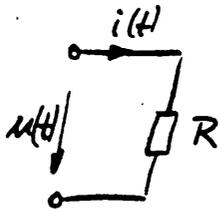
Nachteil: Falls der Frequenzgang nicht als Formel $F(\omega)$ vorliegt, sondern als Messung, aufgeteilt in Betrag $F(\omega)$ und Phase $b(\omega)$, so läßt sich nicht direkt $F(p)$ bestimmen

2.8.5 Allgemeines Netzwerk mit gespeicherter Energie

Für die linearen Bauelemente galten die Beziehungen:

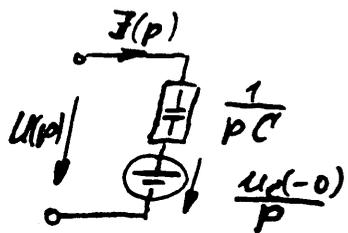
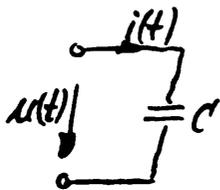
Im Zeitbereich für $t > 0$:

Ersatzschaltung im Bildbereich:



Es kann keine el. Energie gespeichert werden!

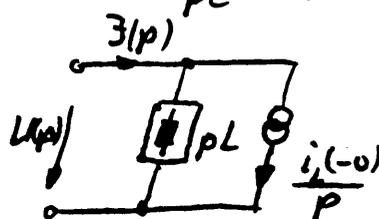
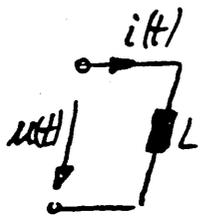
$$u(t) = R \cdot i(t) \quad \circ \longrightarrow \quad U(p) = R \cdot F(p)$$



Das el. Feld zum Zeitpunkt $t = -0$ wirkt wie eine Gleichspannungsquelle für $t > 0$

$$u(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(t) dt \quad \circ \longrightarrow \quad U(p) = \frac{1}{pC} \cdot F(p) + \frac{1}{p} \cdot \frac{i_c(-0)}{C}$$

$$= \frac{1}{pC} \cdot F(p) + \frac{u_c(-0)}{p}$$



Das mag. Feld zum Zeitpunkt $t = -0$ wirkt wie eine Stromquelle für $t > 0$

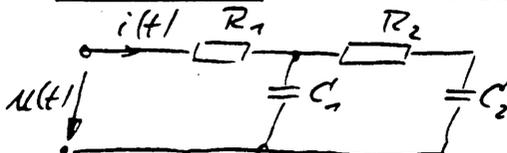
$$u(t) = L \cdot \frac{di}{dt} \quad \circ \longrightarrow \quad U(p) = L \cdot [p \cdot F(p) - i_L(-0)]$$

$$= pL \cdot [F(p) - \frac{i_L(-0)}{p}]$$

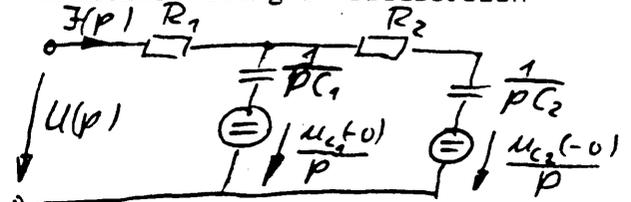
Die speicherfähigen Bauelemente in allg. Netzwerken werden für $t > 0$ im Bildbereich durch die entsprechenden Ersatzschaltungen in der allg. Netzwerkstruktur dargestellt. Die gesuchte Ursache-Wirkungsbeziehung im Bildbereich läßt sich dann mit dem Gedanken: Anwendung der Kirchhoffschen Gleichungen im Widerstandsnetzwerk leicht finden.

So umgeht man das Aufstellen und die Laplace-Transformation der Integro-Dgl. eines Netzwerkes!

Beispiel 1.8 im Zeitbereich für $t > 0$



Ersatzschaltung im Bildbereich



2.9 Partialbruchzerlegung.

Bei Netzwerken mit konzentrierten Bauelementen erhalten wir eine Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten.

Durch Anwendung der Laplace-Transformation erhalten wir im Bildbereich eine gebrochene rationale Funktion in p .

(Bei einfachen Anregungen).

$$F(p) = \frac{G(p)}{N(p)} = \frac{b_m \cdot p^m + b_{m-1} \cdot p^{m-1} + \dots + b_1 \cdot p + b_0}{a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + a_1 \cdot p + a_0} \quad m < n$$

Es müssen die Nullstellen p_1, \dots, p_n (Pole von $F(p)$) gefunden werden.

2.9.1 Bildfunktion mit einfachen Polen.

$$F(p) = \frac{G(p)}{N(p)} = \frac{G(p)}{a_n \cdot (p-p_1) \cdot (p-p_2) \cdot \dots \cdot (p-p_n)}$$

Partialbruchzerlegung:

$$F(p) = \frac{A_1}{p-p_1} + \frac{A_2}{p-p_2} + \dots + \frac{A_n}{p-p_n} = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{p-p_k}$$

Koeffizientenbestimmung falls Zähler und Nenner unterschiedliche Nullstellung haben (keine Anregung mit Eigenwerten!).

Entweder: $A_k = F(p) \cdot (p-p_k) \Big|_{p=p_k}$

oder: $A_k = \frac{G(p_k)}{\frac{dN}{dp} \Big|_{p_k}}$

oder: Koeffizientenvergleich.

2.9.2 Bildfunktion mit mehrfachen Polen.

$$F(p) = \frac{G(p)}{N(p)} = \frac{G(p)}{a_n \cdot (p-p_\infty)^n}$$

Partialbruchzerlegung:

$$F(p) = \frac{B_1}{(p-p_\infty)} + \frac{B_2}{(p-p_\infty)^2} + \dots + \frac{B_n}{(p-p_\infty)^n}$$

Koeffizientenbestimmung:

Entweder: $B_k = \frac{1}{(n-k)!} \cdot \frac{d^{n-k}}{dp^{n-k}} \left[(p-p_\infty)^n \cdot F(p) \right] \Big|_{p=p_\infty}$

oder: Koeffizientenvergleich.

2.9.3 Bildfunktion mit $m > n$

Ansatz: $F(p) = \text{Partialbruchzerlegung} + C_n + C_{n+1} \cdot p + C_{n+2} \cdot p^2 \dots C_m \cdot p^{m-n}$

$$= \text{Partialbruchzerlegung} + \sum_{j=n}^m C_j \cdot p^{j-n}$$

C_j : erhält man durch Koeffizientenvergleich

2.10 Rücktransformation in den Zeitbereich

2.10.1 Lösung bei gegebener Partialbruchzerlegung

Liegt die Wirkung im Bildbereich als Partialbruchzerlegung oder in einfachen Brüchen vor (d.h. Wirkung von Netzwerken aus konzentrierten Bauelementen mit einfacher Anregung), so lassen sich mit der Korrespondenzliste (2.10.3) die den einfachen Brüchen entsprechenden Teilwirkungen im Zeitbereich ablesen. Die Gesamtwirkung im Zeitbereich ist die Superposition dieser Teilwirkungen.

3. Beispiel (Tafel) 2.8.1

$$I(p) = U_0 \cdot C \cdot \frac{1}{1+pCR} = \frac{U_0}{R} \frac{1}{p + \frac{1}{RC}}$$

Korrespondenz:

$$K \cdot e^{p_1 t} \longleftrightarrow \frac{K}{p - p_1}$$

mit dem Koeffizientenvergleich:

$$K = \frac{U_0}{R} \quad -p_1 = \frac{1}{RC}$$

erhält man die Lösung:

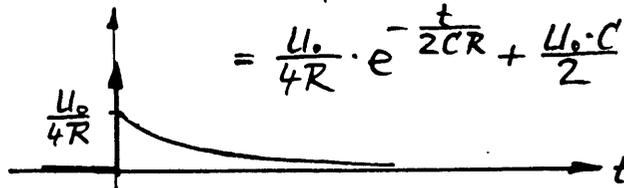
$$i(t > 0) = \frac{U_0}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

Sprungantwort, z.B. 2.9.3:

$$\text{Lösung im Bildbereich: } I(p) = \frac{U_0}{4R} \cdot \frac{1}{p - p_1} + \frac{U_0 \cdot C}{2}$$

$$\text{Rücktransformation: } i(t) = A_1 \cdot e^{p_1 t} + C_1 \cdot \delta(t)$$

$$= \frac{U_0}{4R} \cdot e^{-\frac{t}{2CR}} + \frac{U_0 \cdot C}{2} \cdot \delta(t)$$



2.10.2 Lösung mit dem komplexen Umkehrintegral

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\omega}^{\sigma + j\omega} F(p) \cdot e^{p \cdot t} dp \quad \text{für } t > 0$$

einfacher:

$$f(t) = \sum_{k=1}^n R_k(t)$$

Residuensatz von Cauchy,
falls $F(p)$ n Polstellen hat:

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \lim_{p \rightarrow p_k} [F(p) \cdot e^{p \cdot t} \cdot (p - p_k)]$$

$f(t) = 1$	$\frac{1}{p}$	$F(p)$
$f(t) = K$	$\frac{K}{p}$	
$f(t) = t$	$\frac{1}{p^2}$	
$f(t) = m \cdot t$	$\frac{m}{p^2}$	
$f(t) = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}$	$\frac{1}{p^k}$	
$f(t) = \frac{1}{n!} t^n$	$\frac{1}{p^{n+1}}$	
$f(t) = e^{p_1 t}$	$\frac{1}{p-p_1}$	
$f(t) = \frac{1}{p_1} [e^{p_1 t} - 1]$	$\frac{1}{p(p-p_1)}$	
$f(t) = t \cdot e^{p_0 t}$	$\frac{1}{(p-p_0)^2}$	
$f(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{p_0 t}$	$\frac{1}{(p-p_0)^n}$	
$f(t) = \frac{e^{p_1 t} - e^{p_2 t}}{p_1 - p_2}$	$\frac{1}{(p-p_1)(p-p_2)}$	
$f(t) = (1 + p_0 t) \cdot e^{p_0 t}$	$\frac{p}{(p-p_0)^2}$	
$f(t) = \frac{p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t}}{p_1 - p_2}$	$\frac{p}{(p-p_1)(p-p_2)}$	
$f(t) = \frac{1}{p_1^2} [e^{p_1 t} - 1 - p_1 t]$	$\frac{1}{p^2(p-p_1)}$	
$f(t) = \frac{1}{p_0^2} [1 + (p_0 t - 1) e^{p_0 t}]$	$\frac{1}{p(p-p_0)^2}$	

$f(t) = \frac{1}{2} t^2 \cdot e^{p_0 t}$	$\frac{1}{(p-p_0)^3}$	$F(p)$
$f(t) = [t + \frac{p_0 t^2}{2}] \cdot e^{p_0 t}$	$\frac{p}{(p-p_0)^3}$	
$f(t) = [1 + 2p_0 t + \frac{p_0^2 t^2}{2}] \cdot e^{p_0 t}$	$\frac{p^2}{(p-p_0)^3}$	
$f(t) = \sin(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2}$	
$f(t) = \cos(\omega_0 t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega_0^2}$	
$f(t) = \sin^2(\omega_0 t)$	$\frac{2\omega_0^2}{p(p^2 + 4\omega_0^2)}$	
$f(t) = \cos^2(\omega_0 t)$	$\frac{p^2 + 2\omega_0^2}{p(p^2 + 4\omega_0^2)}$	
$f(t) = e^{p_1 t} \cdot \sin(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{(p-p_1)^2 + \omega_0^2}$	
$f(t) = e^{p_1 t} \cdot \cos(\omega_0 t)$	$\frac{p-p_1}{(p-p_1)^2 + \omega_0^2}$	
$f(t) = 1 - \cos(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0^2}{p(p^2 + \omega_0^2)}$	
$f(t) = \frac{t}{2} \cdot \sin(\omega_0 t)$	$\frac{p \cdot \omega_0}{(p^2 + \omega_0^2)^2}$	
$f(t) = t \cdot \cos(\omega_0 t)$	$\frac{p^2 - \omega_0^2}{(p^2 + \omega_0^2)^2}$	
$f(t) = t - \frac{1}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0^2}{p^2(p^2 + \omega_0^2)}$	
$f(t) = \frac{t^2}{2\omega_0} \cdot \sin(\omega_0 t)$	$\frac{3p^2 - \omega_0^2}{(p^2 + \omega_0^2)^3}$	
$f(t) = \frac{t^2}{2} \cdot \cos(\omega_0 t)$	$\frac{p^3 - 3\omega_0^2 p}{(p^2 + \omega_0^2)^3}$	
$f(t) = \frac{t^3}{24 \cdot \omega_0} \cdot \sin(\omega_0 t)$	$\frac{p^3 - \omega_0^2 p}{(p^2 + \omega_0^2)^4}$	

$f(t) = \frac{p_1 t - [1 + (p_1 - p_0)t] \cdot e^{p_0 t}}{(p_1 - p_0)^2}$	$\frac{1}{(p-p_1)(p-p_0)^2}$	$F(p)$
$f(t) = \frac{p_1(p_2 - p_3) e^{p_1 t} - p_2(p_3 - p_1) e^{p_2 t} + p_3(p_1 - p_2) e^{p_3 t}}{(p_1 - p_2)(p_1 - p_3)(p_2 - p_3)}$	$\frac{p}{(p-p_1)(p-p_2)(p-p_3)}$	
$f(t) = \frac{p_1 t + [p_1 + p_0(p_2 - p_0)t] \cdot e^{p_0 t}}{(p_1 - p_0)^2}$	$\frac{p^2}{(p-p_1)(p-p_0)^2}$	
$f(t) = \frac{p_1^2(p_2 - p_3) e^{p_1 t} + p_2^2(p_3 - p_1) e^{p_2 t} + p_3^2(p_1 - p_2) e^{p_3 t}}{(p_1 - p_2)(p_1 - p_3)(p_2 - p_3)}$	$\frac{p^3}{(p-p_1)(p-p_0)^2}$	
$f(t) = \frac{p_1^2 e^{p_1 t} - [2p_1 p_0 - p_0^2 + p_0^2(p_1 - p_0)t] \cdot e^{p_0 t}}{(p_1 - p_0)^2}$	$\frac{\omega_0^3}{p^2 + \omega_0^2}$	
$f(t) = \frac{1}{2} (\sin(\omega_0 t) - \omega_0 t \cdot \cos(\omega_0 t))$	$\frac{\omega_0 \cdot \omega_0^2}{(p^2 + \omega_0^2)^2}$	
$f(t) = \frac{1}{2} (\sin(\omega_0 t) + \omega_0 t \cdot \cos(\omega_0 t))$	$\frac{\omega_0 \cdot \omega_0^2}{(p^2 + \omega_0^2)^2}$	
$f(t) = \cos(\omega_0 t) - \frac{1}{2} \omega_0 t \cdot \sin(\omega_0 t)$	$\frac{p^3}{p^2 + \omega_0^2}$	
$f(t) = \frac{\omega_0 \cdot \sin(\omega_0 t) - \omega_0^2 \cdot \sin(\omega_0 t)}{\omega_0^2 - \omega_0^2}$	$\frac{\omega_0 \cdot \omega_0^2}{(p^2 + \omega_0^2)(p^2 + \omega_0^2)}$	
$f(t) = \frac{\cos(\omega_0 t) - \cos(\omega_0 t)}{\omega_0^2 - \omega_0^2}$	$\frac{p}{(p^2 + \omega_0^2)(p^2 + \omega_0^2)}$	
$f(t) = \frac{\omega_0 \cdot \sin(\omega_0 t) - \omega_0^2 \cdot \sin(\omega_0 t)}{\omega_0^2 - \omega_0^2}$	$\frac{p^3}{(p^2 + \omega_0^2)(p^2 + \omega_0^2)}$	
$f(t) = \frac{\omega_0^2 \cdot \cos(\omega_0 t) - \omega_0^2 \cdot \cos(\omega_0 t)}{\omega_0^2 - \omega_0^2}$	$\frac{p^3}{(p^2 + \omega_0^2)(p^2 + \omega_0^2)}$	
$f(t) = 1 - \cos(\omega_0 t) - \frac{\omega_0 t}{2} \cdot \sin(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0^4}{p(p^2 + \omega_0^2)^2}$	
$f(t) = 1 + \frac{\omega_0^2 \cdot \cos(\omega_0 t) - \omega_0^2 \cdot \cos(\omega_0 t)}{\omega_0^2 - \omega_0^2}$	$\frac{\omega_0 \cdot \omega_0^2}{p(p^2 + \omega_0^2)(p^2 + \omega_0^2)}$	
$f(t) = \frac{t^3}{6} \cdot \cos(\omega_0 t)$	$\frac{p^4 - 6\omega_0^2 \cdot p^2 + \omega_0^4}{(p^2 + \omega_0^2)^4}$	

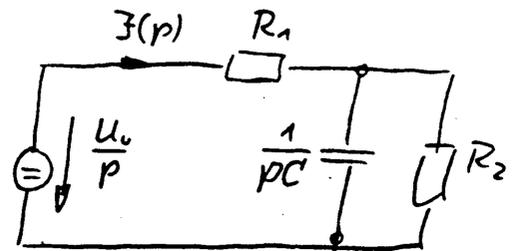
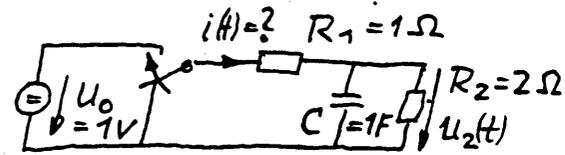
2.11 Systemreaktionen (einige Beispiele)

Sprunganregung zum Beispiel 1.6:

Netzwerk ohne Energie.

Mit 2.8. (Beispiel) folgt

für die Wirkung im Bildbereich:

Für $t > 0$:Ersatzschaltung
im Bildbereich:

$$\begin{aligned}
 \tilde{I}(p) &= \frac{1}{Z(p)} \cdot U(p) \\
 &= \frac{1 + pCR_2}{R_1 + R_2 + pCR_1R_2} \cdot \frac{U_0}{p}
 \end{aligned}$$

Zerlegen in einfache Brüche:
(nicht unbedingt in Partial-
brüche)

$$\begin{aligned}
 &= \frac{U_0}{CR_1R_2} \cdot \frac{1}{p(p + \frac{R_1+R_2}{CR_1R_2})} + \frac{U_0}{R_1} \cdot \frac{1}{p + \frac{R_1+R_2}{CR_1R_2}} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p(p + \frac{3}{2})} + 1 \cdot \frac{1}{p + \frac{3}{2}} \quad [As]
 \end{aligned}$$

Vergleich mit der
Korrespondenzliste:

$$\tilde{I}(p) \hat{=} K_1 \frac{1}{p - p_1} + K_2 \frac{1}{p - p_2}$$



$$i(t) = K_1 \cdot \frac{1}{p_1} \cdot [e^{p_1 t} - 1] + K_2 \cdot e^{p_2 t}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{-\frac{3}{2}} [e^{-\frac{3}{2}t} - 1] + 1 \cdot e^{-\frac{3}{2}t/s}$$

$$i(t > 0) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot e^{-\frac{3}{2}t/s} \quad [A]$$

Integrale trigonometrischer Funktionen*

Integrale, die die Sinusfunktion enthalten

$$274. \int \sin ax \, dx = -\frac{1}{a} \cos ax.$$

$$275. \int \sin^2 ax \, dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4a} \sin 2ax.$$

$$276. \int \sin^3 ax \, dx = -\frac{1}{a} \cos ax + \frac{1}{3a} \cos^3 ax.$$

$$277. \int \sin^4 ax \, dx = \frac{3}{8} x - \frac{1}{4a} \sin 2ax + \frac{1}{32a} \sin 4ax.$$

Integrale, die die Kosinusfunktion enthalten

$$313. \int \cos ax \, dx = \frac{1}{a} \sin ax.$$

$$314. \int \cos^2 ax \, dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4a} \sin 2ax.$$

$$315. \int \cos^3 ax \, dx = \frac{1}{a} \sin ax - \frac{1}{3a} \sin^3 ax.$$

$$316. \int \cos^4 ax \, dx = \frac{3}{8} x + \frac{1}{4a} \sin 2ax + \frac{1}{32a} \sin 4ax.$$

$$317. \int \cos^n ax \, dx = \frac{\cos^{n-1} ax \sin ax}{na} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} ax \, dx.$$

$$318. \int x \cos ax \, dx = \frac{\cos ax}{a^2} + \frac{x \sin ax}{a}.$$

$$319. \int x^2 \cos ax \, dx = \frac{2x}{a^2} \cos ax + \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3} \right) \sin ax.$$

Integrale von Exponentialfunktionen

$$447. \int e^{ax} \, dx = \frac{1}{a} e^{ax}.$$

$$448. \int x e^{ax} \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2} (ax - 1).$$

$$449. \int x^2 e^{ax} \, dx = e^{ax} \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3} \right).$$

$$450. \int x^n e^{ax} \, dx = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} \, dx.$$

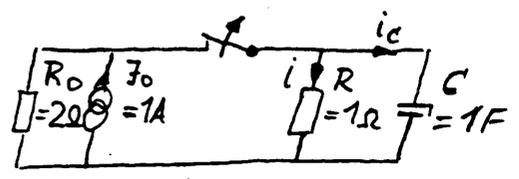
$$451. \int \frac{e^{ax}}{x} \, dx = \ln x + \frac{ax}{1 \cdot 1!} + \frac{(ax)^2}{2 \cdot 2!} + \frac{(ax)^3}{3 \cdot 3!} + \dots *$$

$$452. \int \frac{e^{ax}}{x^n} \, dx = \frac{1}{n-1} \left(-\frac{e^{ax}}{x^{n-1}} + a \int \frac{e^{ax}}{x^{n-1}} \, dx \right) \quad (n \neq 1).$$

$$453. \int \frac{dx}{1+e^{ax}} = \frac{1}{a} \ln \frac{e^{ax}}{1+e^{ax}}.$$

$$454. \int \frac{dx}{b+ce^{ax}} = \frac{x}{b} - \frac{1}{ab} \ln(b+ce^{ax}).$$

Ausgleichsvorgang zum Beispiel 1.5:

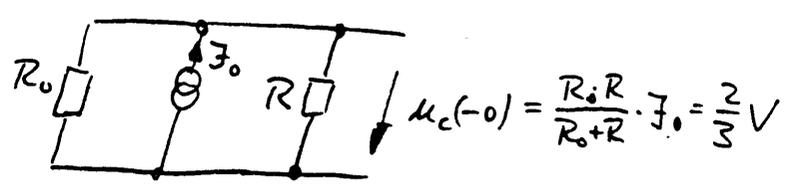


Netzwerk mit Energie.

Berechnung des Anfangswertes

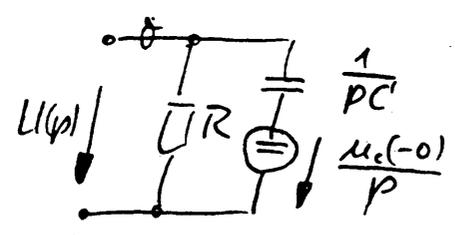
Für $t < 0$:

Ersatzschaltung bei stationärer Anregung im Zeitbereich:



Für $t > 0$:

Ersatzschaltung im Bildbereich:



$$U(p) = \frac{R}{R + \frac{1}{pC}} \cdot \frac{u_c(-0)}{p}$$

Zerlegung in einfache Brüche:

$$= \frac{1}{p + \frac{1}{RC}} \cdot u_c(-0)$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{p + 1}$$

Vergleich mit der Korrespondenzliste:

$$U(p) \hat{=} K_1 \frac{1}{p - p_1}$$

$$u(t) = K_1 \cdot e^{p_1 t}$$

$$u(t > 0) = \frac{2}{3} \cdot e^{-t/s} \text{ [V]}$$

Ersatzschaltungen (unabhängig von Zeit- bzw, Bildbereich) sind grafische Darstellungen von Gleichungen im Zeit- bzw. Bildbereich. Die Darstellung orientiert sich an der technischen Problemstellung.

Anwendung der Grenzwertsätze (2.7.4) bei Sprunganregung

bei Netzwerken ohne gespeicherter Energie:

$$F(p) = I(p) = \frac{1}{Z(p)} \cdot U(p) \quad U(p) = \frac{U_0}{p}$$

$$\boxed{p \cdot F(p) = p \cdot Y(p) \cdot \frac{U_0}{p} = U_0 \cdot Y(p)}$$

$$F(p) = U(p) = Z(p) \cdot I(p) \quad I(p) = \frac{I_0}{p}$$

$$\boxed{p \cdot F(p) = p \cdot Z(p) \cdot \frac{I_0}{p} = I_0 \cdot Z(p)}$$

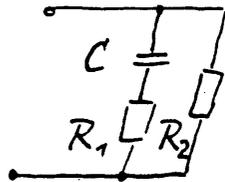
$$\boxed{\begin{aligned} i(t \rightarrow \infty) &= U_0 \cdot Y(p \rightarrow 0) \\ u(t \rightarrow \infty) &= I_0 \cdot Z(p \rightarrow 0) \end{aligned}}$$

Endwertsatz

$$\boxed{\begin{aligned} i(t=+0) &= U_0 \cdot Y(p \rightarrow \infty) \\ u(t=+0) &= I_0 \cdot Z(p \rightarrow \infty) \end{aligned}}$$

Anfangswertsatz

Beispiel:



$$R_1 = 1 \Omega$$

$$R_2 = 2 \Omega$$

$$Z(p \rightarrow 0) = R_2 \quad Y(p \rightarrow 0) = \frac{1}{R_2}$$

$$Z(p \rightarrow \infty) = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \quad Y(p \rightarrow \infty) = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Spannungssprung:

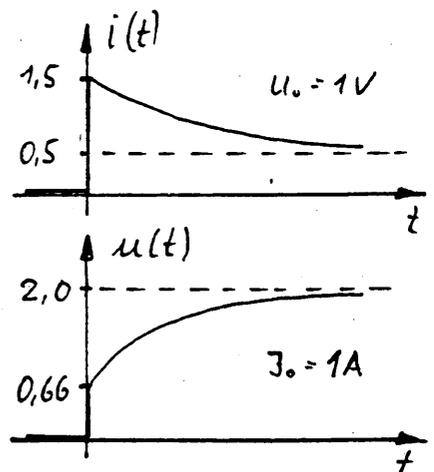
$$i(t=+0) = \frac{U_0}{V} \cdot \frac{3}{2} [A]$$

$$i(t \rightarrow \infty) = \frac{U_0}{V} \cdot \frac{1}{2} [A]$$

Stromsprung:

$$u(t=+0) = \frac{I_0}{A} \cdot \frac{2}{3} [V]$$

$$u(t \rightarrow \infty) = \frac{I_0}{A} \cdot 2 [V]$$



3. F o u r i e r - R e i h e

3.1 Approximation von Meßpunkten durch eine Funktion

Sind zwei Meßpunkte gegeben $(u_1(t_1), u_2(t_2))$,
so ist die einfachste Funktion, die
durch diese Punkte geht, eine Gerade
 $u(t) = a_1 t + a_0$.

Beim Ansatz dieser linearen Interpolation
erhält man die zwei Unbekannten a_1, a_0
durch Auflösen der zwei Bestimmungs-
gleichungen:

$$u_1(t_1) = a_1 \cdot t_1 + a_0$$

nach den Koeffizienten a_1, a_0 .

$$u_2(t_2) = a_1 \cdot t_2 + a_0$$

Sind drei Meßpunkte gegeben,
so erhält man als einfachste
Verbindungskurve eine Parabel
 $u(t) = a_2 \cdot t^2 + a_1 \cdot t + a_0$.

Beim Ansatz dieser quadratischen
Interpolation erhält man die drei
Unbekannten a_2, a_1, a_0 durch Auf-
lösen der drei Bestimmungsgleichungen:

$$u_1(t_1) = a_2 \cdot t_1^2 + a_1 \cdot t_1 + a_0$$

$$u_2(t_2) = a_2 \cdot t_2^2 + a_1 \cdot t_2 + a_0$$

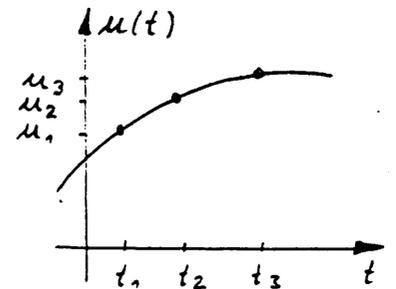
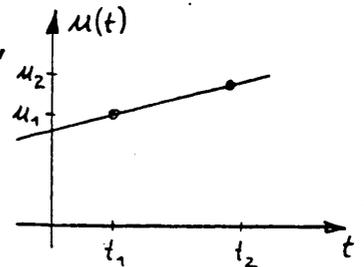
nach den Koeffizienten a_2, a_1, a_0 .

$$u_3(t_3) = a_2 \cdot t_3^2 + a_1 \cdot t_3 + a_0$$

Sind n Meßpunkte vorgegeben, so geht das Polynom $(n - 1)$ -ten Grades

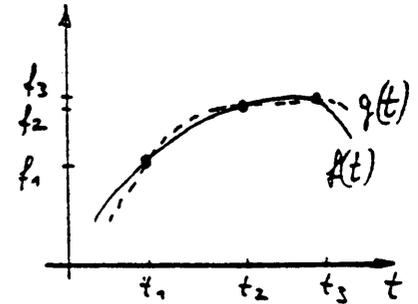
$$u(t) = a_{n-1} \cdot t^{n-1} + a_{n-2} \cdot t^{n-2} + \dots + a_1 \cdot t + a_0$$

durch die n Meßpunkte, falls die n Bestimmungsgleichungen nach
den n Koeffizienten $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$
aufgelöst werden.



3.2 Approximation einer Funktion $f(t)$ durch eine Näherungsfunktion $g(t)$

Mit dem o.a. Verfahren kann man durch Festlegen von Stützstellen $f_n(t_n)$ auf der Funktion $f(t)$ die Näherungsfunktion $g(t)$ als Polynom $(n-1)$ -ten Grades finden. Problem: Die Funktionen sind an den Stützstellen identisch, können aber durch die Wahl der Stützstellen stark voneinander abweichen.



$$\text{Fehler: } F(t) = f(t) - g(t)$$

Beschränkt man sich auf das Intervall $0 < t < T$, so kann man als Abweichungsmaßzahl den

mittleren Fehler definieren:
(kennz. Zahl der Fehlerfunktion)

$$\bar{F} = \frac{1}{T-0} \int_0^T \underbrace{[f(t) - g(t)]}_{F(t)} dt$$

bessere Maßzahl: mittleres Fehlerquadrat:
(kennz. Zahl der Fehlerquadratfunktion)

$$\bar{F}^2 = \frac{1}{T-0} \int_0^T [F(t)]^2 dt$$

Wie muß $g(t)$ gewählt werden, damit \bar{F}^2 zum Minimum wird?

$$\text{Ansatz: } g(t) = a_1 \cdot g_1(t) + a_2 \cdot g_2(t) + \dots + a_n \cdot g_n(t) = \sum_{v=1}^n a_v \cdot g_v(t)$$

d.h.: $\bar{F}^2(a_1, a_2, \dots, a_n)$ soll Minimum werden.

$$\text{Partielle Differentiation: } \frac{\partial \bar{F}^2}{\partial a_1} = 0 \quad \frac{\partial \bar{F}^2}{\partial a_2} = 0 \quad \dots \quad \frac{\partial \bar{F}^2}{\partial a_n} = 0$$

allgemein für die v -te partielle Differentiation:

$$\frac{\partial \bar{F}^2}{\partial a_v} = \frac{\partial}{\partial a_v} \left[\frac{1}{T} \int_0^T [f(t) - g(t)]^2 dt \right] = \frac{1}{T} \cdot 2 \cdot \int_0^T [f(t) - g(t)] \cdot \frac{-\partial g(t)}{\partial a_v} dt$$

$$\text{mit: } \frac{\partial g(t)}{\partial a_v} = \frac{\partial}{\partial a_v} (a_1 \cdot g_1(t) + a_2 \cdot g_2(t) + \dots + a_v \cdot g_v(t) + \dots + a_n \cdot g_n(t)) = g_v(t)$$

$$\text{folgt: } \frac{\partial \bar{F}^2}{\partial a_v} = -\frac{1}{T} \cdot 2 \cdot \int_0^T [f(t) - g(t)] \cdot g_v(t) dt \stackrel{!}{=} 0$$

d.h. es muß gelten:
$$\int_0^T g(t) \cdot g_v(t) dt = \int_0^T f(t) \cdot g_v(t) dt$$

$$\int_0^T [a_1 \cdot g_1(t) + \dots + a_v \cdot g_v(t) + \dots + a_n \cdot g_n(t)] \cdot g_v(t) dt = \int_0^T f(t) \cdot g_v(t) dt$$

Da es n partielle Differentiationen gibt, erhält man n Gleichungen für die n Unbekannten a_1, a_2, \dots, a_n falls die Hilfsfunktionen $g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t)$ gegeben sind!

Sie sind so zu wählen, daß das Gleichungssystem einfach zu lösen ist.

Es sollen orthogonale Funktionen sein:
$$\int_0^T g_i(t) \cdot g_v(t) dt = 0 \text{ für } i \neq v$$

Das Gleichungssystem vereinfacht sich zu n einfachen Gleichungen:

$$\int_0^T a_v \cdot g_v(t) \cdot g_v(t) dt = \int_0^T f(t) \cdot g_v(t) dt$$

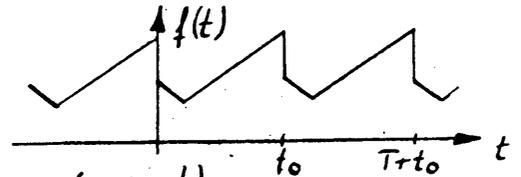
damit erhält man die Unbekannten: a_v die nur von "ihrer" Hilfsfunktion $g_v(t)$ abhängen.

$$a_v = \frac{\int_0^T f(t) \cdot g_v(t) dt}{\int_0^T [g_v(t)]^2 dt}$$

3.3 Approximation einer periodischen Funktion

$$f(t) = f(t + T)$$

Die Hilfsfunktionen müssen ebenfalls periodisch sein.

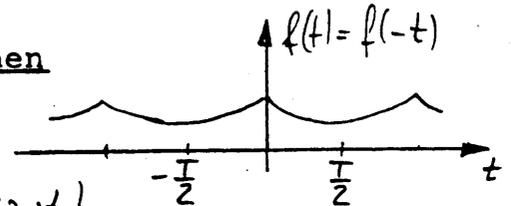


Orthogonale Hilfsfunktionen: $g_\nu(t) : \begin{cases} \sin(\nu \cdot \omega_0 \cdot t) \\ \cos(\nu \cdot \omega_0 \cdot t) \end{cases}$

Grundfrequenz: $f_0 = \frac{1}{T} \implies \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

3.3.1 Symmetrische periodische Funktionen

gerade symmetrische Funktionen:



Hilfsfunktionen:

$$g_\nu(t) = \cos(\nu \cdot \omega_0 \cdot t)$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} [g_\nu(t)]^2 dt = \frac{T}{2} \quad \nu = 1 \div n$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} [g_0(t)]^2 dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} [1]^2 dt = T$$

Näherungsfunktion:

$$g(t) = a_0 \cdot g_0(t) + a_1 \cdot g_1(t) + \dots + a_n \cdot g_n(t)$$

= Fourier-Reihe:

$$= a_0 + a_1 \cos(\omega_0 t) + \dots + a_n \cos(n \omega_0 t)$$

$$= a_0 + \sum_{\nu=1}^n a_\nu \cos(\nu \cdot \omega_0 t)$$

Gleichanteil + Summe von cos-Schwingungen deren Frequenzen ganze Vielfache der Grundfrequenz sind.

Fourier-Koeffizienten: $a_\nu = \frac{\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) \cdot \cos(\nu \cdot \omega_0 \cdot t) dt}{\frac{T}{2}} = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) \cdot \cos(\nu \cdot \omega_0 \cdot t) dt$

Gleichanteil:

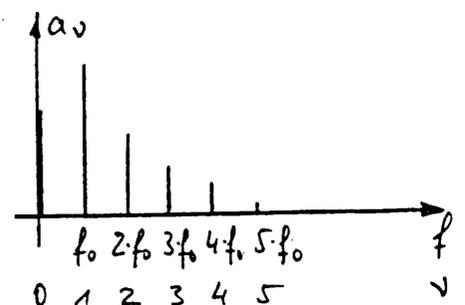
$$a_0 = \frac{\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) dt}{T} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) dt$$

$$a_\nu = \frac{4}{T} \int_0^{+\frac{T}{2}} f(t) \cdot \cos(\nu \cdot \omega_0 \cdot t) dt$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^{+\frac{T}{2}} f(t) dt$$

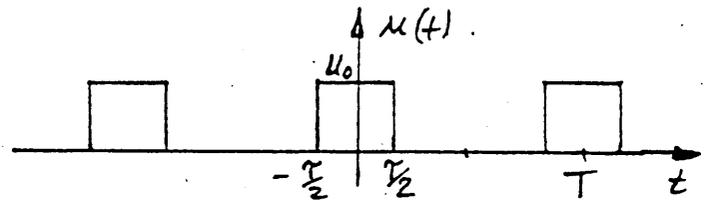
Einfache Darstellung: Linienspektrum:

Es zeigt, bei welchen Frequenzen Schwingungen unabhängig von der Phasenlage wesentliche Amplituden aufweisen und so zur Bildung des Signals wesentlich beitragen.



Beispiel:

$$U_0 = 4V \quad \tau = 1ms \quad T = 5ms$$

a) Mathematische Fassung der Funktion:

$$u(t) = \begin{cases} U_0 & \text{für } 0 < t < \tau/2 \\ 0 & \text{für } \tau/2 < t < T \end{cases}$$

b) Grundfrequenz:

$$f_0 = \frac{1}{T} = \frac{1}{5 \cdot 10^{-3}} = 200 \text{ Hz}$$

c) Fourier-Koeffizienten:

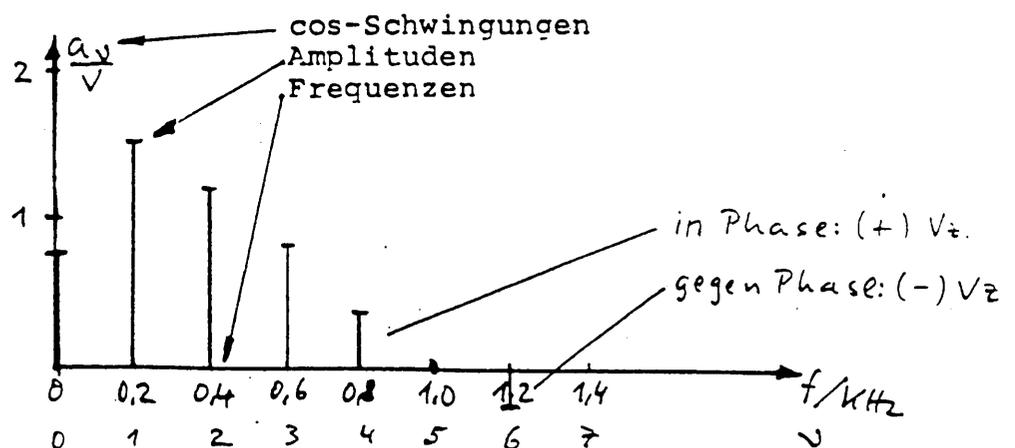
$$\begin{aligned} a_v &= 2 \cdot \frac{2}{T} \cdot \int_0^{\tau/2} u(t) \cdot \cos(v \cdot \omega_0 \cdot t) dt \\ &= \frac{4}{T} \int_0^{\tau/2} U_0 \cdot \cos(v \cdot \omega_0 \cdot t) dt + \frac{4}{T} \int_{\tau/2}^T 0 \cdot \cos(v \omega_0 t) dt \\ &= \frac{4}{T} \cdot U_0 \cdot \frac{1}{v \cdot \omega_0} \cdot \sin(v \omega_0 t) \Big|_0^{\tau/2} + 0 \\ &= \frac{4U_0}{T \cdot 2\pi} \cdot [\sin(v \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2}) - \sin(0)] + 0 \\ &= \frac{2U_0}{\pi v} \cdot \sin(v \pi \frac{\tau}{T}) = \frac{2 \cdot 5}{\pi} \cdot \sin(v \frac{\pi}{5}) [V] \\ a_0 &= 2 \cdot \frac{1}{T} \int_0^{\tau/2} u(t) dt = 2 \cdot \frac{1}{T} \cdot \int_0^{\tau/2} U_0 dt = \frac{2}{T} U_0 \tau \\ &= \frac{2U_0}{T} \cdot [\frac{\tau}{2} - 0] = U_0 \cdot \frac{\tau}{T} = \frac{4}{5} [V] \end{aligned}$$

d) Fourier-Reihe:

$$\begin{aligned} g(t) &= \underbrace{U_0 \frac{\tau}{T}}_{a_0} + \sum_{v=1}^{\infty} \underbrace{\frac{2U_0}{v\pi} \cdot \sin(v\pi \frac{\tau}{T})}_{a_v} \cdot \cos(v \frac{2\pi}{T} \cdot t) \\ &= 0,8 + 1,49 \cdot \cos(2\pi \cdot 200 \cdot t/5) + 1,21 \cos(4\pi \cdot 200 \cdot t/5) \\ &\quad + 0,81 \cdot \cos(6\pi \cdot 200 \cdot t/5) + 0,37 \cdot \cos(8\pi \cdot 200 \cdot t/5) \\ &\quad + 0,0 \cdot \cos(10\pi \cdot 200 \cdot t/5) - 0,24 \cdot \cos(12\pi \cdot 200 \cdot t/5) \end{aligned}$$

e) Linienpektrum:

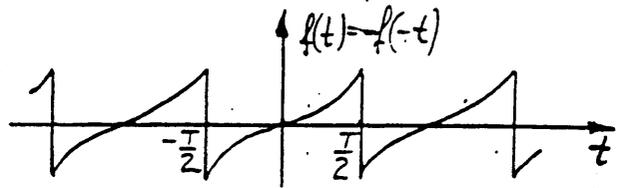
enthält die vollständige Information.



Ungerade symmetrische Funktionen

Hilfsfunktionen:

$$g_\nu(t) = \sin(\nu \cdot \omega_0 \cdot t)$$



Näherungsfunktion:

$$g(t) = b_1 \cdot g_1(t) + b_2 \cdot g_2(t) + \dots + b_n \cdot g_n(t)$$

= Fourier-Reihe:

$$= b_1 \cdot \sin(\omega_0 t) + b_2 \cdot \sin(2\omega_0 t) + \dots + b_n \cdot \sin(n \cdot \omega_0 t)$$

$$= \sum_{\nu=1}^n b_\nu \sin(\nu \cdot \omega_0 t)$$

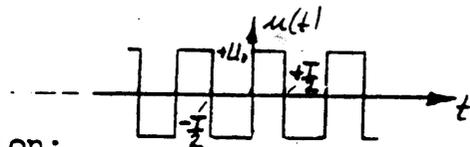
Summe von sin-Schwingungen, deren Frequenzen ganze Vielfache der Grundfrequenz sind

Fourier-Koeffizienten: $b_\nu = \frac{\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) \cdot \sin(\nu \cdot \omega_0 \cdot t) dt}{\frac{T}{2}} = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) \cdot \sin(\nu \omega_0 t) dt$

$$b_\nu = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot \sin(\nu \omega_0 t) dt$$

Beispiel:

$$U_0 = 2V \quad T = 5ms$$

a) Mathematische Fassung der Funktion:

$$u(t) = U_0 \quad \text{für } 0 < t < \frac{T}{2}$$

b) Grundfrequenz:

$$f_0 = \frac{1}{T} = \frac{1}{5 \cdot 10^{-3}s} = 200 \text{ Hz}$$

c) Fourier-Koeffizienten:

$$b_\nu = 2 \cdot \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} u(t) \cdot \sin(\nu \cdot \omega_0 \cdot t) dt$$

$$= \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} U_0 \cdot \sin(\nu \cdot \omega_0 \cdot t) dt$$

$$= \frac{4U_0}{T \cdot 2\pi} \cdot [-\cos(\nu \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}) + 1]$$

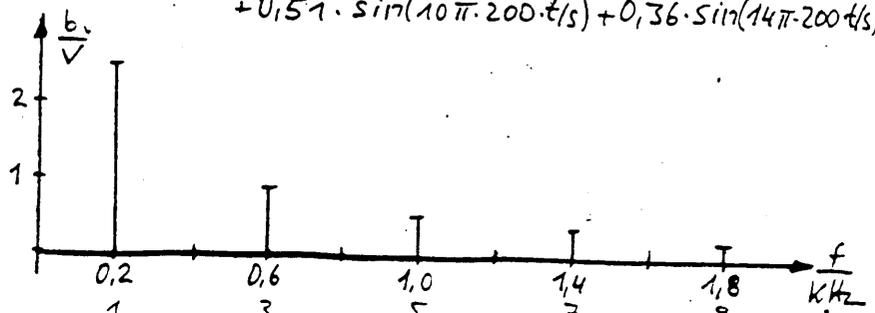
$$= \frac{2U_0}{\nu \pi} \cdot [1 - \cos(\nu \pi)] = \frac{1,27}{\nu} [1 - (-1)^\nu] [V]$$

d) Fourier-Reihe:

$$g(t) = \sum_{\nu=1}^n \frac{2U_0}{\nu \pi} \cdot [1 - (-1)^\nu] \cdot \sin(\nu \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t)$$

$$= 2,54 \cdot \sin(2\pi \cdot 200 \cdot t/s) + 0,85 \cdot \sin(6\pi \cdot 200 \cdot t/s)$$

$$+ 0,51 \cdot \sin(10\pi \cdot 200 \cdot t/s) + 0,36 \cdot \sin(14\pi \cdot 200 \cdot t/s) \dots$$

e) Linienpektrum:

Die Originalfunktion $f(t)$ kann offensichtlich durch die Näherungsfunktion $g(t)$ ersetzt werden, wenn $g(t)$ unendlich viele Glieder enthält. Hier: $f(t) = \sum_{v=1}^{\infty} b_v \cdot \sin(v \cdot \omega_0 t)$ unendliche Reihe.

Den verbleibenden minimierten Fehler bei endlicher Gliederzahl

hier: $g(t) = \sum_{v=1}^n b_v \cdot \sin(v \cdot \omega_0 t)$ endliche Reihe, erhält man durch Berechnung des Fehlerquadrats \overline{F}_n^2 .

$$\text{Hier: } F_n(t) = \left(f(t) - \sum_{v=1}^n b_v \cdot \sin(v \cdot \omega_0 t) \right)$$

$$\overline{F}_n^2 = 2 \cdot \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} [F_n(t)]^2 dt$$

Beispiel: Näherung 1. Ordnung:

$$g(t) = b_1 \cdot \sin(\omega_0 t)$$

Fehlerfunktion, betrachtet für $0 < t < \frac{T}{2}$

$$F_1(t) = f(t) - g(t) = U_0 - \frac{4U_0}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right)$$

Fehlerquadratfunktion:

$$(F_1(t))^2 = \left[U_0 - \frac{4U_0}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \right]^2$$

Mittleres Fehlerquadrat:

$$\begin{aligned} \overline{F}_1^2 &= \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \left[U_0 - \frac{4U_0}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \right]^2 dt \\ &= \left[U_0^2 - 8 \left(\frac{U_0}{\pi} \right)^2 \right] = 0,19 U_0^2 = 0,76 [\text{V}^2] \end{aligned}$$

Beispiel: Näherung 3. Ordnung:

$$g(t) = b_1 \sin(\omega_0 t) + b_3 \sin(3\omega_0 t)$$

$$b_1 = \frac{4U_0}{\pi} \quad b_3 = \frac{4U_0}{3\pi}$$

$$\text{Fehlerfunktion: } F_3(t) = f(t) - g(t) = U_0 - \frac{4U_0}{\pi} \cdot \sin(\omega_0 t) - \frac{4U_0}{3\pi} \cdot \sin(3\omega_0 t)$$

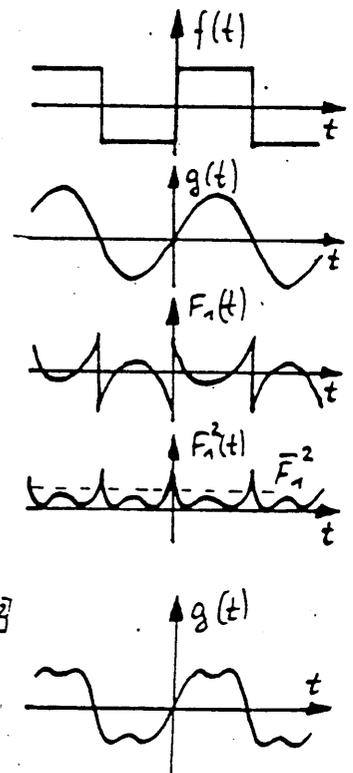
$$\text{Mittleres Fehlerquadrat: } \overline{F}_3^2 = \left[U_0^2 - 8 \left(\frac{U_0}{\pi} \right)^2 - 8 \left(\frac{U_0}{3\pi} \right)^2 \right] = 0,1 \cdot U_0^2 = 0,4 [\text{V}^2]$$

$$\text{Allgemein: (für dieses Beispiel)} \quad \overline{F}_n^2 = U_0^2 \left[1 - \frac{8}{\pi^2} \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right) \right]$$

Dieses Fehlermaß entspricht elektrisch der Leistungsdifferenz der periodischen Funktion $f(t)$ und der endlichen Fourier-Reihe $g(t)$ an einem ohmschen Widerstand.

Damit die Fourier-Reihe $g(t)$ zum Funktionswert $f(t)$ konvergiert, muß $f(t)$ folgende Eigenschaften haben:

- eine stetige Funktion mit endlich vielen Sprungstellen,
- endlich viele Extrema.

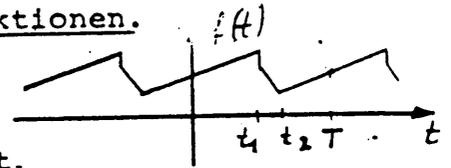


3.3.2 Nichtsymmetrische, periodische Funktionen.

$f(t)$ kann stückweise stetig sein:

hier:

$$f(t) = \begin{cases} +m_1 \cdot t + n_1 & \text{für } 0 < t < t_1 \\ -m_2 \cdot t + n_2 & \text{für } t_1 < t < t_2 \\ +m_1 \cdot t + n_3 & \text{für } t_2 < t < T \end{cases}$$



Näherungsfunktion: unendliche Fourier-Reihe

entweder: $f(t) = a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} \cdot \cos(\nu \omega_0 t) + \sum_{\nu=1}^{\infty} b_{\nu} \cdot \sin(\nu \omega_0 t)$

mit den Fourier-Koeffizienten:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T f(t) dt \\ a_{\nu} &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \cos(\nu \omega_0 t) dt \\ b_{\nu} &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \sin(\nu \omega_0 t) dt \\ f_0 &= \frac{1}{T} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \end{aligned}$$

und der Grundfrequenz:

oder:

$$f(t) = a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \hat{S}_{\nu} \cos(\nu \cdot \omega_0 \cdot t + \varphi_{\nu})$$

Gleichanteil + Summe von phasenverschobenen cos-Schwingungen.

$$\hat{S}_{\nu} = \sqrt{a_{\nu}^2 + b_{\nu}^2}$$

$$\varphi_{\nu} = -\arctan\left(\frac{b_{\nu}}{a_{\nu}}\right) \quad \text{Vorzeichen von } a_{\nu} \text{ beachten}$$

Wichtig: Zeitverschiebungen von $f(t)$ nach $f(t - t_1)$ wirken sich nicht auf die Amplituden \hat{S}_{ν} , sondern nur auf die Phasenlagen φ_{ν} der phasenverschobenen cos-Schwingungen einer Fourier-Reihe aus.

3.5 Systemreaktion

Eine periodische cosinusförmige Anregung der Frequenz f_0
 (Beginn: $t = -\infty$) wird im System einen eingeschwingenen Zustand
 derselben Frequenz f_0 als Wirkung erzeugen
 (Anfangswerte sind abgeklungen).

Beim Zweipol läßt sich der Zusammenhang zwischen Anregung und
 Wirkung durch Einführung eines komplexen Wechselstromwiderstandes
 einfach darstellen:

$$\underline{Z}(\omega_0) = Z(\omega_0) \cdot e^{j\varphi(\omega_0)}$$

Dabei wird die reelle Anregung: $i(t) = I \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi)$

durch den komplexen Zeiger ersetzt: $\underline{I} = I \cdot e^{j\varphi}$

der mit ω_0 rotierend als Drehzeiger
 einen komplexen Zeitaugenblickswert
 darstellt:

$$\underline{i}(t) = \underline{I} \cdot e^{j\omega_0 t}$$

$$\text{es gilt: } i(t) = \operatorname{Re}\{\underline{i}(t)\} = \operatorname{Re}\{\underline{I} \cdot e^{j\omega_0 t}\} = \operatorname{Re}\{I \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega_0 t}\} = I \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Die Wirkung erhält man mit dem
 "Ohmschen" Gesetz

$$\underline{U} = \underline{Z}(\omega_0) \cdot \underline{I}$$

$$= Z(\omega_0) \cdot I \cdot e^{j(\varphi(\omega_0) + \varphi)}$$

Die so gefundene Wirkung:

$$\underline{U} = U \cdot e^{j\varphi_{\text{ges}}}$$

Ist ebenfalls ein komplexer Zeiger,
 der als Drehzeiger mit ω_0 rotiert.

Mit diesem komplexen Augenblickswert

für die Wirkung:

$$\underline{u}(t) = \underline{U} \cdot e^{j\omega_0 t}$$

Erhält man die reelle Wirkung:

$$u(t) = \operatorname{Re}\{\underline{u}(t)\}$$

$$= \operatorname{Re}\{U \cdot e^{j\varphi_{\text{ges}}} \cdot e^{j\omega_0 t}\}$$

$$= U \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_{\text{ges}})$$

Wenn von einer periodischen, allgemeinen Stromanregung $i(t)$ die Fourier-Koeffizienten bekannt sind, I_ν , φ_ν können diese ebenfalls als komplexe Anregungszeiger aufgefaßt werden:

$$\underline{I}_\nu = I_\nu \cdot e^{j\varphi_\nu}$$

die mit den Drehgeschwindigkeiten $\nu \cdot \omega_0$ rotieren.

Die Wirkung erhält man ebenfalls mit dem "Ohmschen" Gesetz:

$$\underline{U}_\nu = \underline{Z}(\nu \cdot \omega_0) \cdot \underline{I}_\nu$$

Diese Wirkungszeiger rotieren

$$= \underline{Z}(\nu \cdot \omega_0) \cdot I_\nu \cdot e^{j(\varphi(\nu \cdot \omega_0) + \varphi_\nu)}$$

ebenfalls als Drehzeiger mit $\nu \cdot \omega_0$

$$= U_\nu \cdot e^{j\varphi_{ges}(\nu)}$$

Den komplexen Spannungszeit Augenblickswert erhält man als Summe von Drehzeigern, die mit unterschiedlichen Drehgeschwindigkeiten $\nu \cdot \omega_0$ rotieren.

Diese Reihendarstellung des komplexen Augenblickswertes der Wirkung heißt auch:

"Komplexe" Fourier-Reihe:
$$\underline{u}(t) = U_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \underline{U}_\nu \cdot e^{j\nu \cdot \omega_0 t} = U_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} U_\nu \cdot e^{j(\nu \cdot \omega_0 t + \varphi_{ges}(\nu))}$$

Damit erhält man die reelle Wirkung:

$$u(t) = \operatorname{Re}\{\underline{u}(t)\} = U_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} U_\nu \cdot \cos(\nu \cdot \omega_0 t + \varphi_{ges}(\nu))$$

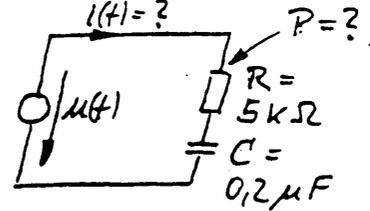
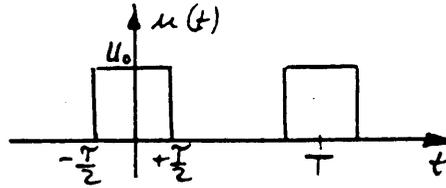
1. Beispiel:

Eine Impulsfolge $u(t)$ wirkt auf einen Zweipol (Beispiel 3.3.1).

$$U_0 = 4V$$

$$T = 5ms$$

$$\tau = 1ms$$



a) Grundfrequenz: $f_0 \hat{=} 200 \text{ Hz}$

b) Fourier-Koeffizienten: $b_v = 0$

$$a_0 = U_0 \cdot \frac{\tau}{T} = 0,8V$$

$$a_v = \frac{2U_0}{\sqrt{\pi}} \cdot \sin\left(\pi v \frac{\tau}{T}\right)$$

c) Komplexe Anregungszeiger:

$$\underline{U}_v = U_v \cdot e^{j\varphi_v} \text{ hier: } a_v$$

d) Wechselstromleitwert:
$$\underline{Y}(v, \omega) = \frac{1}{\underline{Z}(v, \omega_0)} = \frac{1}{R + \frac{1}{jv \cdot \omega_0 \cdot C}} = \frac{j \cdot v \cdot \omega_0 \cdot C}{1 + jv \cdot \omega_0 \cdot R \cdot C}$$

$$= \frac{v \cdot \omega_0 \cdot C}{\sqrt{1 + (v \cdot \omega_0 \cdot R \cdot C)^2}} \cdot e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(v \cdot \omega_0 \cdot R \cdot C)\right)}$$

$$= Y(v, \omega_0) \cdot e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(v \cdot \omega_0 \cdot R \cdot C)\right)}$$

e) Wirkungszeiger:

$$\underline{I}_v = \underline{Y}(v, \omega_0) \cdot \underline{U}_0 = Y(v, \omega_0) \cdot a_v \cdot e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(v \cdot \omega_0 \cdot R \cdot C)\right)}$$

$$= I_v \cdot e^{j\varphi_{\text{ges}}(v)}$$

v	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
U_v	0,8	1,49	1,19	0,79	0,37	0	-0,24	-0,34	-0,3	-0,16	0	V
I_v	0	0,23	0,22	0,16	0,07	0	-0,05	-0,07	-0,06	-0,03	0	mA
$\varphi_{\text{ges}}(v)$	/	38,5	21,6	14,8	11,2	9,0	7,5	6,4	5,7	5,0	4,5	Grad

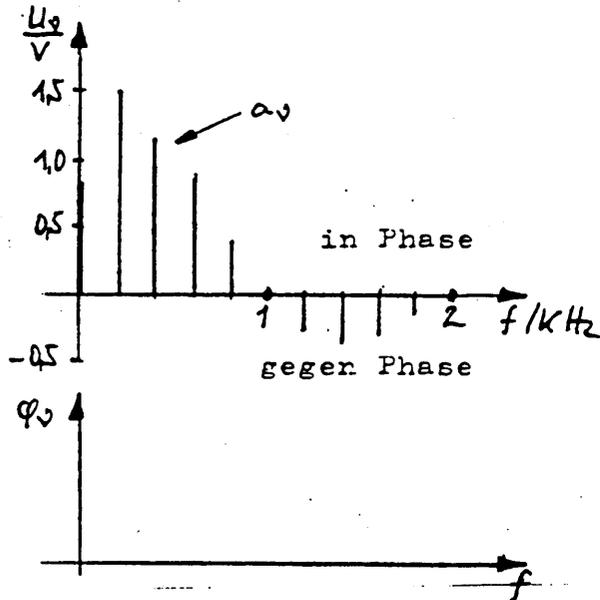
$$I_v = \frac{0,08\pi \cdot v}{\sqrt{1 + (0,4\pi \cdot v)^2}} \cdot \frac{8}{\pi \cdot v} \cdot \sin\left(v \cdot \frac{\pi}{5}\right) \text{ [mA]}$$

$$= \frac{0,64 \cdot \sin\left(v \cdot \frac{\pi}{5}\right)}{\sqrt{1 + (0,4\pi \cdot v)^2}} \text{ [mA]}$$

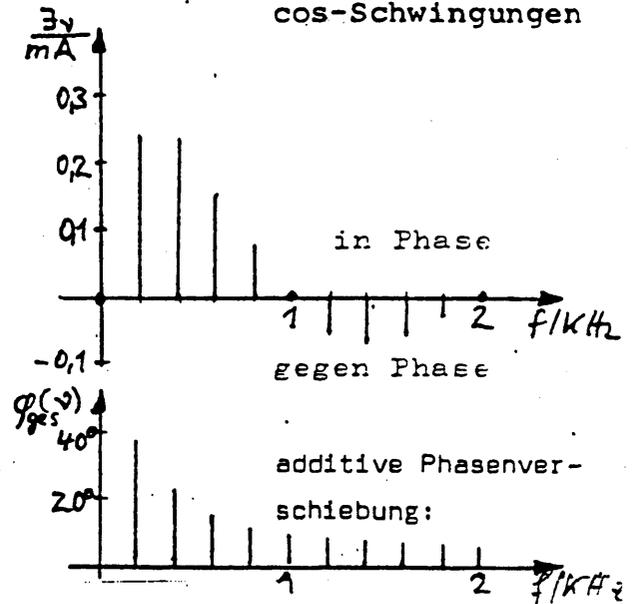
$$\varphi_{\text{ges}}(v) = 90^\circ - \arctan(0,4\pi v)$$

Linienspektren

Anregung: Reine cos-Schwingungen



Wirkung: phasenverschobene cos-Schwingungen



2. Beispiel:

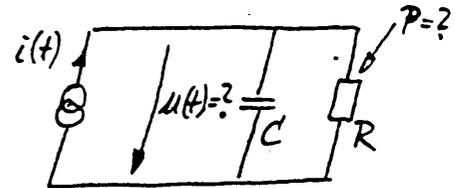
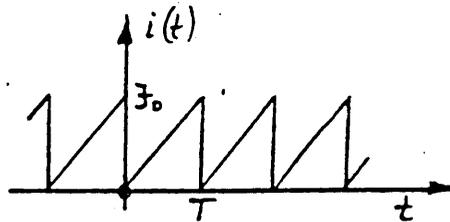
Ein Sägezahn wirkt auf einen Zweipol

$$I_0 = 20 \text{ mA}$$

$$T = 1 \text{ ms}$$

$$R = 5 \text{ k}\Omega$$

$$C = 20 \text{ nF}$$

a) Grundfrequenz

$$f_0 = 1 \text{ kHz}$$

b) Fourier-Koeffizienten

$$a_0 = \frac{I_0}{2} = 10 \text{ mA}$$

$$a_v = 0$$

$$b_v = \frac{-I_0}{\pi v}$$

c) Komplexe Anregungszeiger:

$$\underline{I}_v = I_v \cdot e^{j\varphi_v} \text{ hier: } b_v$$

d) Wechselstromwiderstand:

$$\underline{Z}(v, \omega) = \frac{R}{1 + jv \cdot \omega \cdot R \cdot C}$$

$$= \frac{R}{\sqrt{1 + (v \cdot \omega \cdot RC)^2}} \cdot e^{-j \arctan(v \cdot \omega \cdot RC)}$$

e) Wirkungszeiger:

$$\underline{U}_v = \underline{Z}(v, \omega) \cdot \underline{I}_v$$

$$= \underline{Z}(v, \omega) \cdot b_v \cdot e^{-j \arctan(v \cdot \omega \cdot RC)}$$

$$= U_v \cdot e^{j\varphi_{ges}(v)}$$

v	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
I_v	+10	-6,4	-3,18	-2,12	-1,59	-1,27	-1,06	-0,91	-0,79	-0,71	-0,64	mA
U_v	+50	-26,9	-9,9	-5,0	-2,9	-1,9	-1,4	-1,0	-0,8	-0,6	-0,5	V
$\varphi_{ges}(v)$	/	-33,1	-51,5	-62,1	-68,3	-72,3	-75,1	-77,2	-78,7	-80,0	-81,0	Grad

$$U_v = \frac{5}{\sqrt{1 + (0,2\pi \cdot v)^2}} \cdot \frac{-20}{\pi \cdot v} \text{ [V]}$$

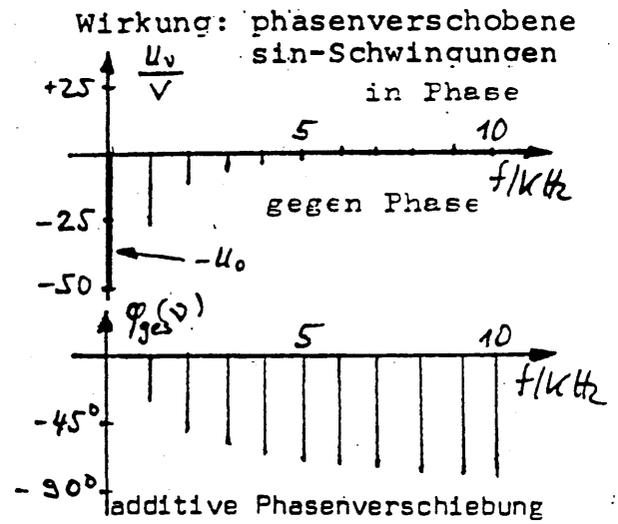
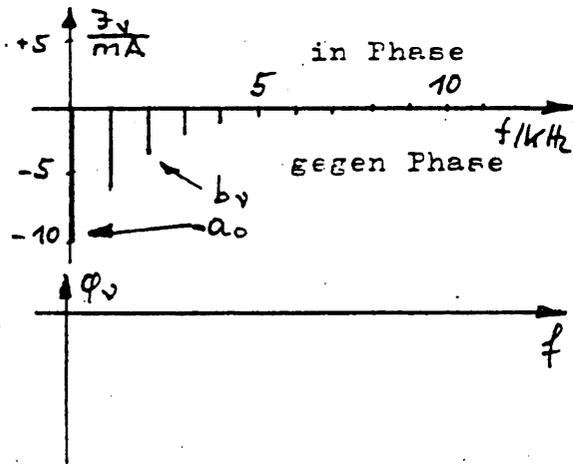
$$= -\frac{100}{\pi v} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (0,2\pi \cdot v)^2}} \text{ [V]}$$

$$U_0 = Z(0) \cdot a_0 = 50 \text{ [V]}$$

$$\varphi_{ges}(v) = -\arctan(0,2\pi \cdot v)$$

Linienspektren

Anregung: Reine sin-Schwingungen



3.6 Fourier-Reihe mit komplexen Koeffizienten

Durch den von Euler definierten Dreher: $e^{\pm j\varphi} = \cos(\varphi) \pm j \sin(\varphi)$ lassen sich trigonometrische Funktionen darstellen.

Die Fourier-Reihe $f(t) = a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} [a_{\nu} \cdot \cos(\nu \cdot \omega_0 \cdot t) + b_{\nu} \cdot \sin(\nu \cdot \omega_0 \cdot t)]$

geht über in:
$$f(t) = a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \underbrace{\left[\frac{a_{\nu} - j b_{\nu}}{2} \right]}_{=c_{\nu}} \cdot e^{j\nu \cdot \omega_0 \cdot t} + \underbrace{\left[\frac{a_{\nu} + j b_{\nu}}{2} \right]}_{=c_{\nu}^*} \cdot e^{-j\nu \cdot \omega_0 \cdot t}$$

reelle Zeitfunktion = komplexer Zeiger x Dreher + konj.kompl. Zeiger x conj.kompl. Dreher
 = kompl. Zeit-
 augenblickswert = conj.kompl. Zeit-
 augenblickswert

mit den
 komplexen
 "Amplituden":

$$c_{\nu} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot e^{-j\nu \cdot \omega_0 \cdot t} dt = c_{\nu} \cdot e^{j\varphi_{\nu}}$$

$$c_{\nu}^* = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot e^{+j\nu \cdot \omega_0 \cdot t} dt = c_{\nu} \cdot e^{-j\varphi_{\nu}}$$

Sinus- und Cosinus-Schwingungen positiver Frequenz $\nu \cdot f_0$ werden durch die Addition von positiv und negativ rotierenden Zeigern gleicher Winkelgeschwindigkeit $\nu \cdot \omega_0$ ersetzt.
Gedanke: Die negative Rotation $-(\nu \cdot \omega_0)$ kann durch einen positiv rotierenden Zeiger mit negativer Frequenz erreicht werden. $+(-\nu \cdot \omega_0)$

$$c_{\nu}^* = +c_{-\nu}$$

es folgt:

mit:

$$f(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} c_{\nu} \cdot e^{j\nu \cdot \omega_0 \cdot t}$$

$$c_{\nu} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot e^{-j\nu \cdot \omega_0 \cdot t} dt$$

daraus erhält man die reellen Amplituden:

der cos-Schwingungen $a_{\nu} = 2 \cdot \operatorname{Re}\{c_{\nu}\}$ $a_0 = c_0$
 der sin-Schwingungen $b_{\nu} = -2 \cdot \operatorname{Im}\{c_{\nu}\}$
 der phasenverschobenen cos-Schwingungen $\hat{S}_{\nu} = \sqrt{a_{\nu}^2 + b_{\nu}^2} = 2 \cdot |c_{\nu}|$

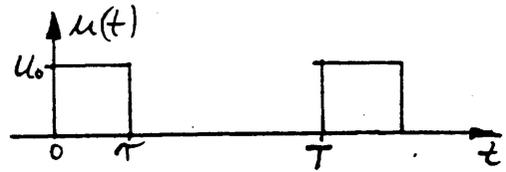
Beispiel:

$$U_0 = 4V$$

$$\tau = 1ms$$

$$T = 5ms$$

$$a_0 = U_0 \cdot \frac{\tau}{T} \\ = 0,8 [V]$$



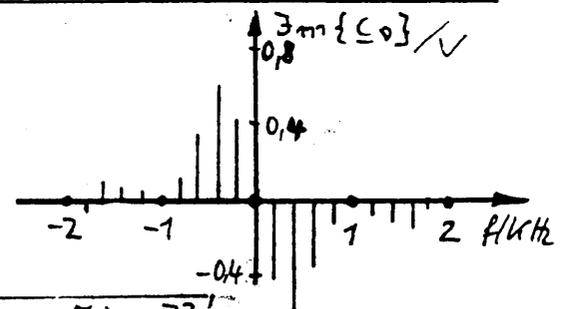
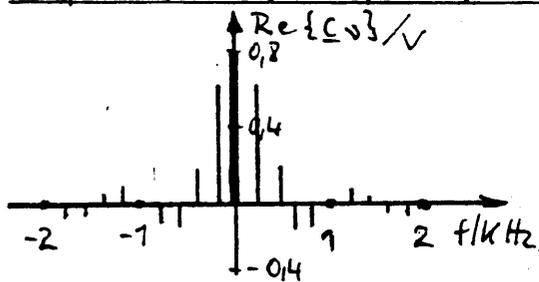
$$\underline{c}_v = \frac{1}{T} \int_0^{\tau} U_0 \cdot e^{-j\nu\omega_0 t} dt = \frac{U_0}{T} \cdot \frac{1}{-j\nu\omega_0} \cdot e^{-j\nu\omega_0 t} \Big|_0^{\tau}$$

$$= j \frac{U_0}{2\pi\nu} \cdot [e^{-j\nu 2\pi \frac{\tau}{T}} - 1] = j \frac{U_0}{2\pi\nu} \cdot [\cos(2\pi\nu \frac{\tau}{T}) - 1 - j \sin(2\pi\nu \frac{\tau}{T})]$$

$$= \frac{U_0}{2\pi\nu} \cdot [\sin(2\pi\nu \frac{\tau}{T}) + j(\cos(2\pi\nu \frac{\tau}{T}) - 1)]$$

$$= \frac{0,63}{\nu} \cdot [\sin(\frac{2}{5}\pi\nu) + j(\cos(\frac{2}{5}\pi\nu) - 1)] [V]$$

$\pm\nu$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
$\frac{1}{2} a_v = \text{Re}\{\underline{c}_v\}$	0,8	0,6	0,19	-0,12	-0,15	0	+0,1	0,05	-0,05	-0,07	0	V
$\frac{1}{2} b_v = -\text{Im}\{\underline{c}_v\}$	0	$\pm 0,43$	$\pm 0,57$	$\pm 0,38$	$\pm 0,11$	0	$\pm 0,07$	$\pm 0,12$	$\pm 0,14$	$\pm 0,02$	0	V

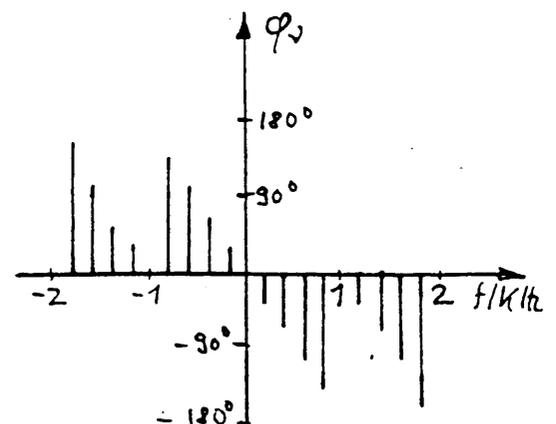
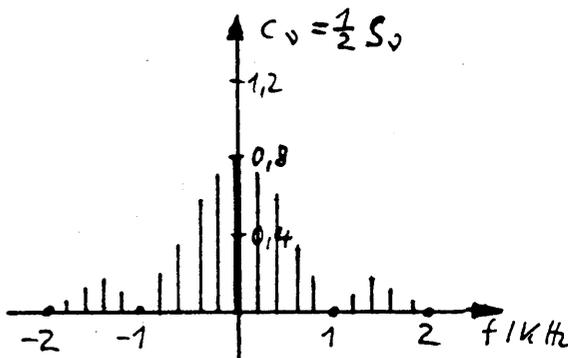


$$c_v = \frac{1}{2} S_v = \frac{U_0}{2\pi\nu} \sqrt{[\sin(2\pi\nu \frac{\tau}{T})]^2 + [\cos(2\pi\nu \frac{\tau}{T}) - 1]^2}$$

$$= \frac{U_0}{2\pi\nu} \cdot \sqrt{2 - 2 \cdot \cos(2\pi\nu \frac{\tau}{T})} = \frac{U_0}{\pi\nu} \cdot |\sin(\pi\nu \frac{\tau}{T})| = \frac{1,27}{\nu} |\sin(\frac{\pi}{5} \cdot \nu)| [V]$$

$$\varphi_v = + \arctan\left(\frac{\cos(\frac{2\pi}{5} \cdot \nu) - 1}{\sin(\frac{2\pi}{5} \cdot \nu)}\right)$$

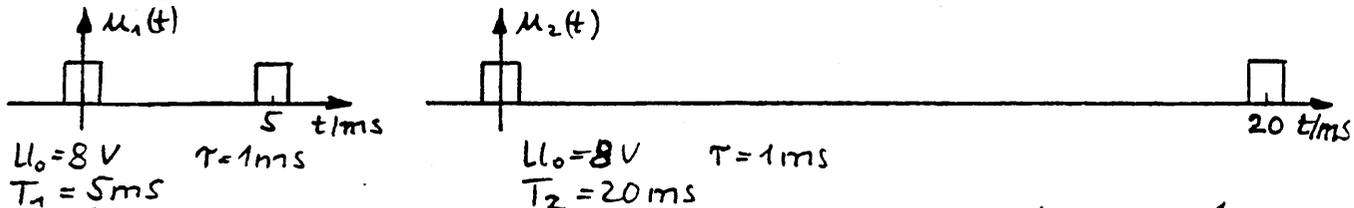
$\pm\nu$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
c_v	0,8	0,75	0,57	0,4	0,19	0	0,12	0,17	0,15	0,08	0	V
φ_v	/	∓ 35	∓ 71	∓ 107	∓ 144	/	∓ 35	∓ 67	∓ 110	∓ 164	/	Grad

Zweiseitige spektrale Darstellung:

4 Fourier-Transformation

4.1 Fourier-Reihe einer Zeitfunktion mit variabler Periodendauer

Beispiel: Gerade symmetrischer Rechteckimpuls



Es gilt wegen:

$$f(t) = f(-t)$$

$$f_0 = \frac{1}{T}$$

reelle Amplituden:

$$c_v = \frac{1}{2} \cdot a_v = \frac{U_0}{\pi v} \cdot \sin(\pi v \frac{\tau}{T})$$

$$a_0 = U_0 \cdot \frac{\tau}{T}$$

reelle Amplitudendichten:
(neue Rechengröße)

$$T \cdot c_v = \frac{T}{2} \cdot a_v = \frac{T \cdot U_0}{\pi v} \cdot \sin(\pi v \frac{\tau}{T})$$

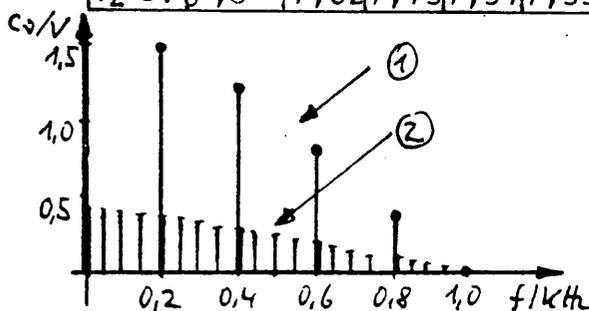
$$T \cdot a_0 = U_0 \cdot \tau$$

①

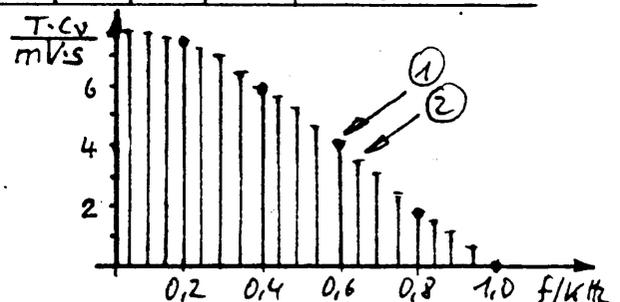
$f = v \cdot f_0$	0	200	400	600	800	1000	Hz
v	0	1	2	3	4	5	
c_v	1,6	1,47	1,19	0,79	0,37		V
$T \cdot c_v$	8,0	7,35	5,94	3,95	1,84		mV sec

②

$f = v \cdot f_0$	0	50	100	150	200	250	300	350	400	...	Hz
v	0	1	2	3	4	5	6	7	8		
c_v	0,4	0,39	0,39	0,38	0,37	0,35	0,34	0,32	0,3		V
$T \cdot c_v$	8,0	7,82	7,73	7,57	7,35	7,07	6,74	6,36	5,94		mV sec



Linienpektrum
der Amplituden



Linienpektrum
der Amplitudendichten

Fazit: Wird die Periodendauer von zeitbegrenzten Impulsen vergrößert, so erhöht sich die Anzahl der beteiligten Schwingungen in einem Frequenzintervall. Ihre Amplituden nehmen umgekehrt proportional ab. Für $T \rightarrow \infty$ sind somit unendlich viele Schwingungen mit unendlich kleinen Amplituden zu erwarten. Die Rechengröße Amplitudendichte $\frac{\Delta \text{Amplitude}}{\text{Frequenzabstand}}$ ist jedoch unabhängig von der Wahl der Periodendauer und nur von der Form des zeitbegrenzten Impulses abhängig.

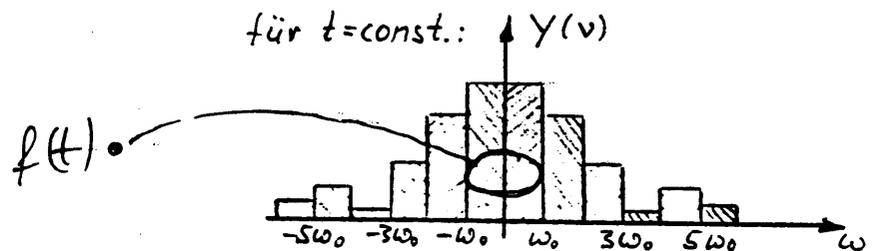
4.2 Fourier-Integral4.2.1 Herleitung mit der Fourier-Reihe

Ausgehend von der Fourier-Reihe

mit komplexen Koeffizienten: $f(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} c_{\nu} \cdot e^{j\nu\omega_0 t}$ $\omega_0 = 2\pi \cdot \frac{1}{T}$

$$\text{folgt: } f(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \underbrace{\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} (T \cdot c_{\nu})}_{\text{Amplitudendichten}} \cdot e^{j\nu \cdot \omega_0 \cdot t} \times \omega_0$$

Amplitudendichten
 kompl. Zeit-
 augenblicks-
 wert $\underline{y}(\nu, t)$ \times Linienabstand
 $\hat{=}$ Flächenelement

reeller Zeitfunktionswert = Aufsummierung der Flächenelemente:

schrittweise Grenzwertbetrachtung:

Für $T \rightarrow \infty$ folgt: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \rightarrow d\omega$ und: $\nu \cdot \omega_0 \rightarrow \omega$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} T \cdot c_{\nu} \cdot e^{j\nu\omega_0 t} \cdot \omega_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \{T \cdot c_{\nu}\} \cdot e^{j\omega t} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{S}(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega$$

$$\text{mit: } \underline{S}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \{T \cdot c_{\nu}\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ T \cdot \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) \cdot e^{-j\nu\omega_0 t} dt \right.$$

$$\left. = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \right.$$

komplexes Amplitudendichtespektrum (eine Rechengrösse)

4.2.2 Herleitung mit dem Transformationsbegriff

Mit der Fourier-Transformierten: $\underline{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$

erhält man das komplexe Amplitudendichtespektrum:

$$\underline{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

d.h. die Bildfunktion von $f(t)$.

Die Rücktransformation in den Zeitbereich (Originalfunktion)

erhält man mit dem

Umkehr-Integral:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{S}(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega$$

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re}\{\underline{S}(\omega) \cdot e^{j\omega t}\} d\omega$$

Zum besseren Vergleich von Messung und Rechnung ist auch folgende Definition eingeführt:

$$\underline{S}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-j2\pi f t} dt$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{S}(f) \cdot e^{j2\pi f t} df$$

$$f(t) = 2 \cdot \int_0^{\infty} \operatorname{Re}\{\underline{S}(f) \cdot e^{j2\pi f t}\} df$$

Die Funktionswerte von $\underline{S}(f)$ und $\underline{S}(\omega)$ sind fast immer identisch.

4.3 Eigenschaften und Hilfssätze

4.3.1 Symmetrie-Eigenschaften

Gerade symmetrische Zeitfunktion:

Ungerade symmetrische Zeitfunktion:

Beliebige Zeitfunktion:

$$\begin{aligned}
 f(t) &= f(-t) \\
 \underline{S}(\omega) &= A(\omega) = 2 \int_0^{\infty} f(t) \cdot \cos(\omega t) dt \\
 f(t) &= -f(-t) \\
 \underline{S}(\omega) &= j \cdot B(\omega) = -j 2 \int_0^{\infty} f(t) \cdot \sin(\omega t) dt \\
 f(t) & \\
 \underline{S}(\omega) &= S(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)} = A(\omega) + j B(\omega)
 \end{aligned}$$

mit: gerade symmetrisch:

$$A(\omega) = A(-\omega)$$

$$S(\omega) = S(-\omega)$$

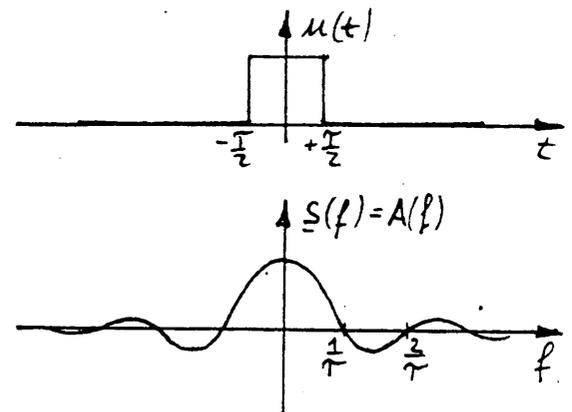
ungerade symmetrisch:

$$B(\omega) = -B(-\omega)$$

$$\varphi(\omega) = -\varphi(-\omega)$$

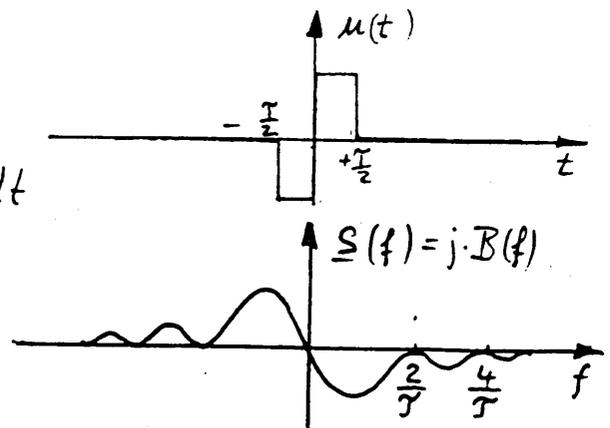
Beispiel:

$$\begin{aligned}
 u(t) &= u(-t) \\
 \underline{S}(\omega) &= A(\omega) = 2 \int_0^{\frac{\tau}{2}} u_0 \cdot \cos(\omega t) dt \\
 &= 2 u_0 \cdot \frac{1}{\omega} \cdot \sin(\omega t) \Big|_0^{\frac{\tau}{2}} \\
 &= u_0 \cdot \tau \cdot \frac{\sin(\omega \frac{\tau}{2})}{\omega \cdot \frac{\tau}{2}}
 \end{aligned}$$



Beispiel:

$$\begin{aligned}
 u(t) &= -u(-t) \\
 \underline{S}(\omega) &= j B(\omega) = -j 2 \int_0^{\frac{\tau}{2}} u_0 \cdot \sin(\omega t) dt \\
 &= -j \frac{2 u_0}{\omega} \cdot [-\cos(\omega t)] \Big|_0^{\frac{\tau}{2}} \\
 &= j u_0 \cdot \tau \cdot \frac{\cos(\omega \frac{\tau}{2}) - 1}{\omega \frac{\tau}{2}}
 \end{aligned}$$



4.3.2 Hilfssätze

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \underline{S}(\omega)$$

4.3.2.1 Ähnlichkeitssatz:

$$\mathcal{F}\{f(\alpha \cdot t)\} = \frac{1}{\alpha} \cdot \underline{S}\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$$

Grundgesetz der Nachrichtentechnik

Zeitdauer eines Signals ist umgekehrt proportional seiner Bandbreite.

4.3.2.2 Verschiebungssatz:

$$\mathcal{F}\{f(t-t_0)\} = e^{-j\omega \cdot t_0} \cdot \underline{S}(\omega)$$

$$|\mathcal{F}\{f(t-t_0)\}| = S(\omega)$$

4.3.2.3 Differentiation:

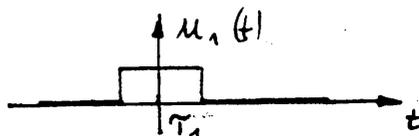
$$\mathcal{F}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = j\omega \cdot \underline{S}(\omega)$$

4.3.2.4 Integration:

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{j\omega} \cdot \underline{S}(\omega) + \pi \cdot S(0) \cdot \delta(\omega)$$

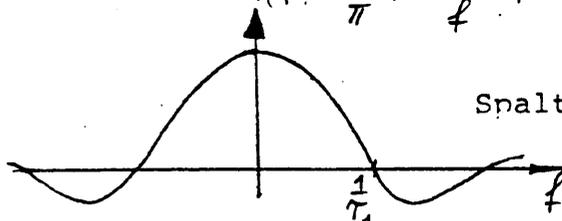
$$= \frac{1}{j2\pi f} \cdot S(f) + \frac{1}{2} \cdot S(0) \cdot \delta(f)$$

Beispiel:

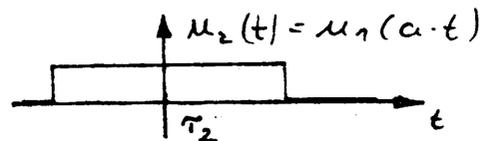


$$\underline{S}_1(\omega) = A_1(\omega) = 2U_0 \cdot \frac{\sin(\omega \frac{\tau_1}{2})}{\omega}$$

$$A_1(f) = \frac{U_0}{\pi} \cdot \frac{\sin(\pi f \tau_1)}{f}$$



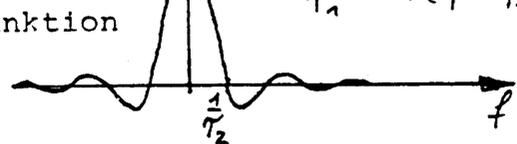
Spaltfunktion



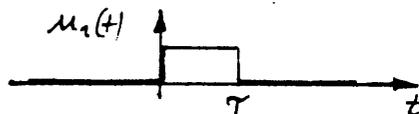
$$\underline{S}_2(\omega) = A_2(\omega) = 2U_0 \cdot \frac{\sin(\omega \frac{\tau_2}{2})}{\omega}$$

$$A_2(f) = \frac{U_0}{\pi} \cdot \frac{\sin(\pi f \tau_2)}{f}$$

$$= \frac{\tau_2}{\tau_1} \cdot A_1\left(f \cdot \frac{\tau_1}{\tau_2}\right)$$



Beispiel:



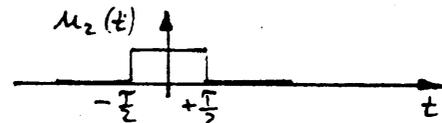
$$\underline{S}_1(\omega) = A_1(\omega) + j B_1(\omega)$$

$$= U_0 \tau \cdot \frac{\sin(\omega \tau)}{\omega \tau} + j U_0 \tau \frac{\cos(\omega \tau) - 1}{\omega \tau}$$

$$S_1(\omega) = \frac{U_0}{\omega} \cdot \sqrt{[\sin(\omega \tau)]^2 + [\cos(\omega \tau) - 1]^2}$$

$$= \frac{U_0}{\omega} \cdot \sqrt{2 - 2 \cdot \cos(\omega \tau)}$$

$$= \frac{2U_0}{\omega} \cdot |\sin(\omega \frac{\tau}{2})|$$



$$\underline{S}_2(\omega) = A_2(\omega) = U_0 \cdot \tau \cdot \frac{\sin(\omega \frac{\tau}{2})}{\omega \frac{\tau}{2}}$$

$$S_2(\omega) = \frac{2U_0}{\omega} \cdot |\sin(\omega \frac{\tau}{2})|$$

4.3.3 Spezialfälle

4.3.3.1 Nadelimpuls

Um die Amplitudendichte eines technischen Nadelimpulses $u_1(t)$ zu bestimmen, wird von der Fouriertransformierten der (technisch nicht realisierbaren) mathematischen Impulsfunktion -Dirac-Stoß- ausgegangen:

$$\delta(t)$$

Der Verlauf der Stoß-"Funktion" ist nicht als Formel gegeben.

Es sind nur zwei Werte dieser "Funktion" bekannt:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{für } -0 < t < +0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Für die Fläche unter der "Funktion" gilt: $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$ [dimensionslos]

D.h. die "Funktion" $\delta(t)$ ist über ihr Integral definiert.

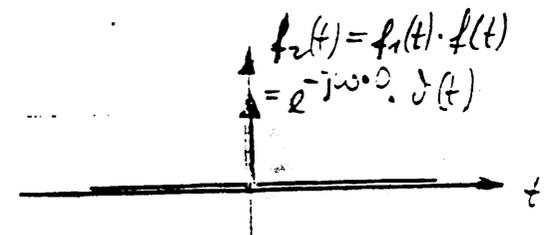
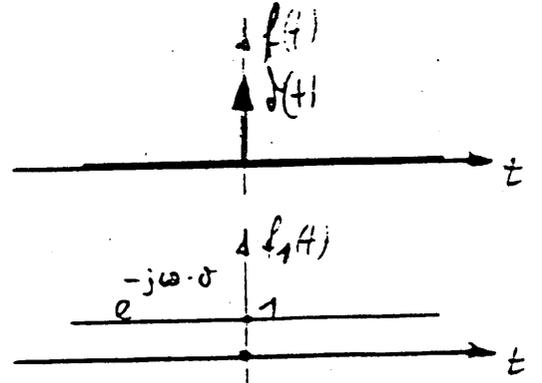
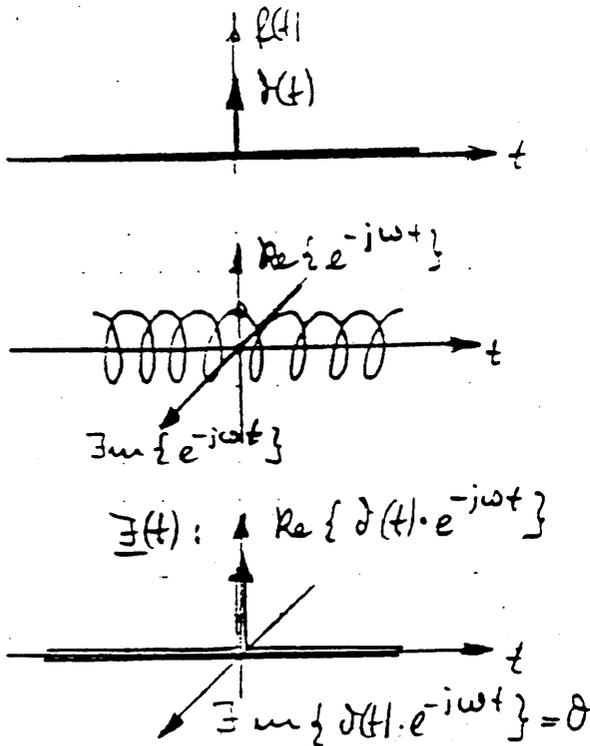
Die Dimension der "Funktion" ist somit: $[\frac{1}{s}]$, wenn die unabhängige Variable, die Zeit t , die Dimension $[s]$ hat.

Zur Bestimmung des Fourierintegrals des Dirac Stoßes hilft eine anschauliche Darstellung des Verlaufes des Integranden. $\underline{F}(t) = \delta(t) \cdot e^{-j\omega t}$

Wirkung der "Ausblendeigenschaft" des Dirac Stoßes $f(t) = \delta(t)$

- im Integranden $\Xi(t)$:

- an einer Vergleichfunktion:



$$\underline{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Xi(t) dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

$$\stackrel{!}{=} \underline{S}_2(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega \cdot 0} \cdot \delta(t) dt$$

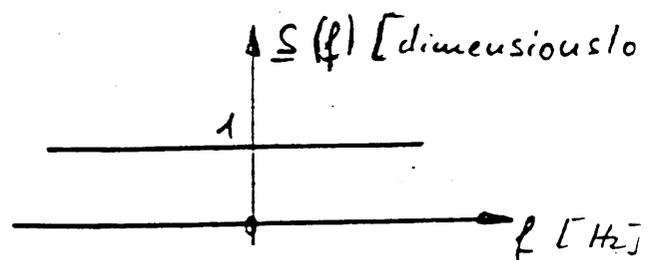
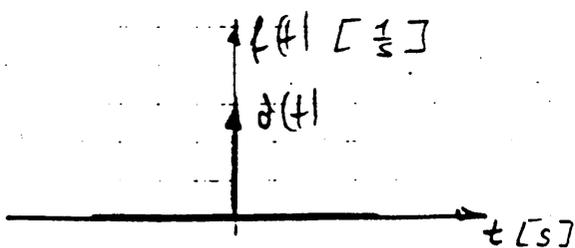
$$\stackrel{!}{=} e^{-j\omega \cdot 0} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt$$

$$\stackrel{!}{=} 1 \cdot 1 \quad [\text{dimensionlos}]$$

Korrespondenz:

$f(t) = \delta(t) \iff \underline{S}(\omega) = A(\omega) = 1$ $\underline{S}(f) = 1 [\phi]$
--

Stoß-Zeitfunktion:



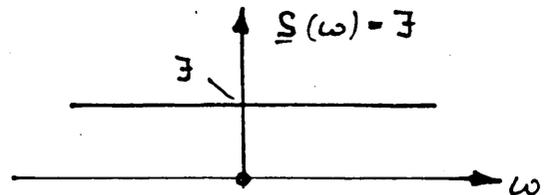
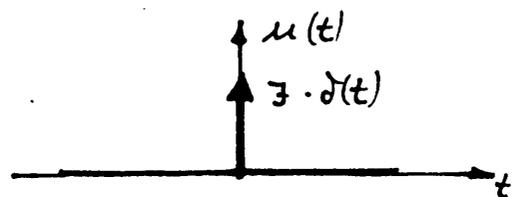
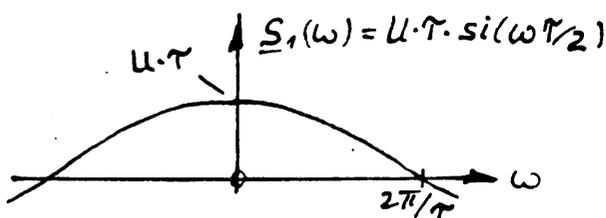
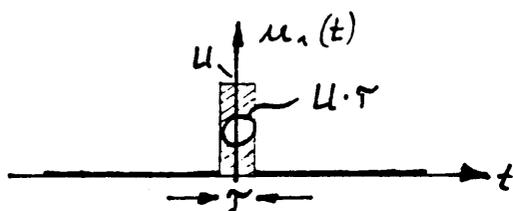
Mit der Rücktransformationsformel läßt sich der Dirac-Stoß als Integralausdruck darstellen.

$$\begin{aligned} \delta(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot e^{+j\omega t} d\omega = \frac{1}{\pi} \cdot \left[\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{+j\omega t} d\omega + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 e^{+j\omega t} d\omega \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \left[\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{+j\omega t} d\omega + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-j\omega t} d\omega \right] = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos(\omega t) d\omega \\ &= 2 \cdot \int_0^{\infty} \cos(2\pi f t) df \end{aligned}$$

Anschauliche Deutung:

Die Aufsummierung von cos-Zeitfunktionen mit infinitesimal kleinen, aber frequenzunabhängig konstanten Amplituden $\frac{d\omega}{\pi} = 2df$ [s⁻¹] ergibt die mathematische Impulszeitfunktion: $\delta(t)$

Der technische Nadelimpuls $u_1(t)$ kann unter Berücksichtigung des Dirac-Stoßes genähert werden durch: $u(t) = \exists \cdot \delta(t)$



Damit $u_1(t) \approx u(t)$ ist, müssen wenigstens die Anfangswerte der Spektren gleich sein:

$$\underline{S}_1(0) \approx \underline{S}(0)$$

$$U \cdot \tau \approx \exists \quad [\text{Dimension: V} \cdot \text{s}]$$

D.h. der Proportionalitätsfaktor \exists in der Näherung $u(t)$ für den technischen Nadelimpuls $u_1(t)$ muß gleich der Impulsfläche $\int u_1(t) dt$ des technischen Nadelimpulses gewählt werden. Die Näherung $u_1(t) \approx u(t)$ ist um so besser, je kleiner τ ist.

1.2.2 Übertragungsfunktion bei Impulsanregung

Es werden die Rechenregeln der Fourier-Transformation auf die das System beschreibende Dgl angewendet.

Beispiel: RC-Tiefpaß

$$RC \cdot \dot{u}_2 + u_2 = u_1$$

$$j\omega \cdot RC \cdot \underline{S}_2(\omega) + \underline{S}_2(\omega) = \underline{S}_1(\omega)$$

$$\underline{S}_2(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega \cdot RC} \cdot \underline{S}_1(\omega)$$

$$\underline{S}_2 \sim \underline{S}_1$$

Proportionalitätsfaktor: Übertragungsprozeß = $\frac{\text{Ausgangsfunktion}}{\text{Eingangsfunktion}} = \frac{\underline{S}_2}{\underline{S}_1} \equiv \underline{F}$
 ist zeitinvariant:

Die Übertragungsfunktion: $\underline{F}(\omega) = F(\omega) \cdot e^{jb(\omega)}$

ist identisch mit dem Frequenzgang, falls keine Anfangsbedingungen zu berücksichtigen sind.

Das Spektrum der Empfangsfunktion erhält man durch Multiplikation des Frequenzganges mit dem Spektrum des Sendesignales:

$$\underline{S}_2(\omega) = \underline{F}(\omega) \cdot \underline{S}_1(\omega)$$

$$\mathcal{F}\{u_2(t)\} = \underline{F}(\omega) \cdot \mathcal{F}\{u_1(t)\}$$

Sonderfall: Sendezeitsignal ist die Stoßfunktion

$$u_1(t) \hat{=} \delta(t) \longrightarrow \underline{S}_1(\omega) = 1$$

$$\underline{S}_2(\omega) = \underline{F}(\omega) \cdot 1$$

Das Spektrum der Impulsantwortfunktion ist identisch mit dem Frequenzgang des Übertragungskanal.

Zusammenfassung:

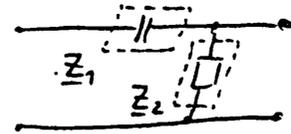
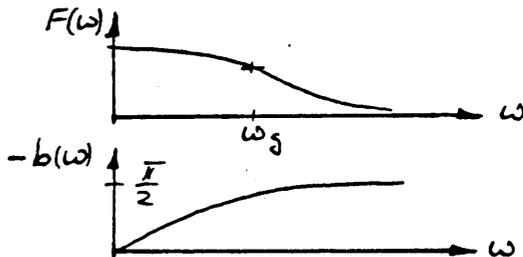
Bei einem System erhält man im Frequenzbereich für jede Anregungsform die gleiche Systemfrequenzfunktion.

Die Systemfrequenzfunktion läßt sich bei gegebener Schaltung durch Einführen des komplexen Widerstandes unter Verwendung der Rechenregeln für komplexe Zahlen leicht finden.

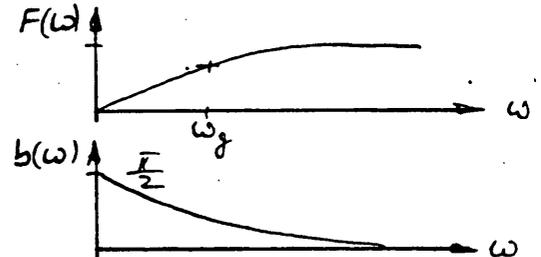
Beispiele:



$$F(\omega) = \frac{Z_2}{Z_2 + Z_1} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

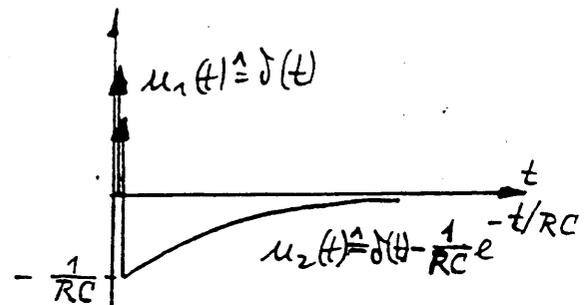
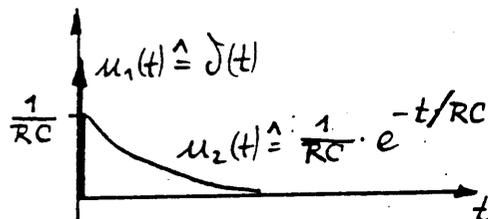
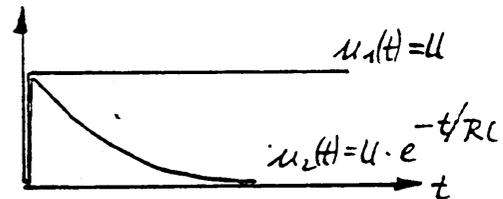
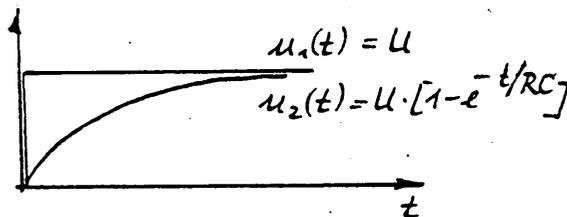


$$F(\omega) = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}$$



Das Sendezeitsignal wird durch die Systemfrequenzfunktion beeinflusst und erscheint als verzerrtes Empfangszeitsignal.

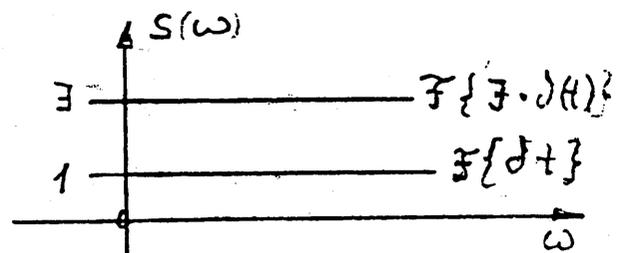
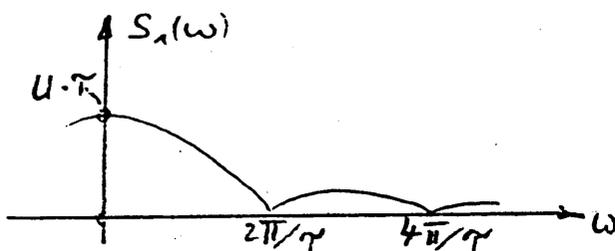
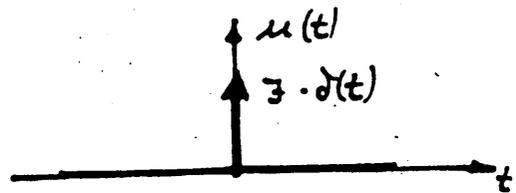
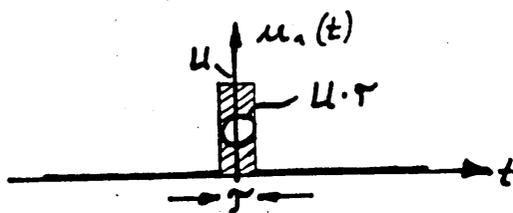
Zu den Beispielen:



1.3 Systemzeitfunktionen
(Hilfsmittel zur Systemsynthese)

Wesentliche Eigenschaften eines Systems können auch aus der Systemreaktion im Zeitbereich auf bestimmte Testsignale abgelesen werden. In der Praxis ist es schwierig, einen Nadelimpuls (sehr hoch, sehr schmal) vollständig (nicht begrenzt) auf das System wirken zu lassen.

Näherung für den technischen Nadelimpuls $u_1(t)$, unter Berücksichtigung des mathematischen Dirac Stoßes. $u(t) = I \cdot \delta(t)$



Damit $u(t) \approx u_1(t)$ ist, muß für $I = U \cdot \tau$ eingesetzt werden.

Der technische Nadelimpuls wirkt wie eine mathematische Impulsfunktion die mit einer Konstanten I multipliziert wird.

Es genügt daher, die Wirkung der mathematischen Impulsfunktion zu untersuchen.

1.3.1 Impulsantwort

Mit der Rücktransformationsformel läßt sich die anregende, unstetige Impulsfunktion als Integralausdruck darstellen:

$$u_1(t) \triangleq \delta(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega t) d\omega \quad \rightarrow \quad S_1(\omega) = 1$$

$$= 2 \int_0^{\infty} \cos(2\pi f t) df \quad [Hz]$$

Anschauliche Deutung:

Die Impulsfunktion wirkt wie eine Summe von cos-Schwingungen mit konstanten Amplituden $\frac{d\omega}{\pi} = 2df$ auf den Kanal.

Wirkt diese Impulsanregung: $u_1(t) \hat{=} \delta(t)$ [Hz]

auf ein Übertragungssystem mit dem Frequenzgang: $\underline{F}(\omega) = F(\omega) \cdot e^{jb(\omega)}$

so erhält man die Systemreaktion: $\underline{S}_2(\omega) = \underline{F}(\omega) \cdot \underline{S}_1(\omega) = \underline{F}(\omega) \cdot 1$

Die Rücktransformationsformel:

$$u_2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{S}_2(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega$$

liefert die Impulsantwort bei gegebenem Frequenzgang:

$$\begin{aligned} u_2(t) \hat{=} g(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \cdot e^{jb(\omega)} \cdot e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \cdot e^{j(\omega t + b(\omega))} d\omega \end{aligned}$$

mit:

$$\varphi(\omega) = -\varphi(-\omega) = b(\omega) + \omega \cdot t$$

folgt:

$$u_2(t) \hat{=} g(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F(\omega) \cdot \cos(\omega t + b(\omega)) d\omega$$

Anschauliche Deutung:

Die Impulsantwort setzt sich aus einer Summe von phasenverschobenen cos-Schwingungen zusammen.

Die Amplituden erhält man durch Multiplikation der anregenden konstant Amplituden $\frac{d\omega}{\pi}$ mit dem Amplitudengang $F(\omega)$ des Kanals.

Die Phasenlagen entsprechen dem Phasengang des Kanals.

Die Impulsantwort wird auch Gewichtsfunktion genannt, da sie allein durch das System bewertet wird.

Bei gegebener Impulsantwort $g(t)$ liefert die Fourier-Transformation den Frequenzgang des Kanals:

$$\underline{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$