BERUFSAKADEMIE MANNHEIM
STAATLICHE STUDIENAKADEMIE

Fachrichtung Informationstechnik

Dokumentation zum Vortrag

Störungstheorie linearer Gleichungssysteme

von

Doreen Seider (Matr-Nr: 173591)

und

Enrico Tappert (Matr-Nr: 173178)

Vorlesung: Seminar Informationstechnik
Dozent: Prof. Tischhauser

Abstract

Störungstheorie linearer Gleichungssysteme

In vielen Bereichen der Wissenschaft und Technik werden Probleme mit Hilfe von linearen Gleichungssystemen gelöst. Im Rahmen dieses Vortrages wurden Fehler und Störungen in solchen Systemen betrachtet und auf deren Auswirkung auf die Lösung eingegangen.

Um solche Betrachtungen durchhführen zu können, wurde eingangs eine mathematische Grundlage geschaffen, die darin bestand, Lösungsalgorithmen zu den linearen Gleichungssystemen vorzustellen und den Begriff der Norm einzuführen.

Inhaltsverzeichnis

1 Lösungsalgorithmen

Die Grundidee aller Algorithmen zur Lösung linearer Gleichungssysteme in der Form $Ax = b$ ist, die gegebene Matrix A in ein oder mehrere Dreiecksmatrizen zu überführen. Dreiecksmatrizen innerhalb eines linearen Gleichungssystems ermöglichen eine einfache Lösung durch Vorwärts- oder Rückwärtssubstitution.

Beispiel 1:

$$\begin{array}{cccc|c} 5 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 2 & 8 & 0 & 0 & 12 \\ 7 & 3 & 6 & 0 & 35 \\ 1 & 9 & 3 & 2 & 22 \end{array}$$

Es ist die erweiterte Matrix eines linearen Gleichungssystems mit einer Linksdreiecksmatrix dargestellt. Dieses System lässt sich durch Vorwärtseinsetzen lösen.
Aus der ersten Zeile ergibt sich:

$$5x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 10$$
$$x_1 = 2$$

Mit der zweiten Zeile lässt sich folgende Gleichung aufstellen und mit der Lösung der ersten Gleichung das zweite Element berechnen:

$$2x_1 + 8x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 12$$
$$x_2 = 1$$

Damit können alle Elemente der gesuchten Lösung errechnet werden.

Beispiel 2:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 9 & 3 & 2 & 22 \\ 0 & 7 & 3 & 6 & 35 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 10 \end{array}$$

Analog zur Vorwärtssubstitution ist hier die erweiterte Matrix eines linearen Gleichungssystems mit Rechtsdreieckmatrix dargestellt. Die Lösung erhält man, indem man wie bei der Vorwärtssubstitution Gleichungen aufstellt. Dabei beginnt man mit der letzten Zeile und geht bei der Berechnung zeilenweise nach oben.

1.1 Algorithmus von Gauß

Die Lösung eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ ändert sich nicht, wenn man:

- eine Gleichung mit einer Konstanten ungleich Null multipliziert ($\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$)
- diese Gleichung zu einer anderen addiert
- zwei Zeilen miteinander vertauscht

Aufgrund dieser Umformungen entstand beim Algorithmus von Gauß die Idee, das lineare Gleichungssystem in ein äquivalentes System $Rx = c$ (R für die Rechtsdreiecksmatrix) zu überführen, das dieselbe Lösung besitzt. Aufgrund der so entstandenen Rechtsdreiecksmatrix R lässt sich dieses System durch Rückwärtseinsetzen lösen.

Das lineare Gleichungssystem $Rx = c$ lässt sich aufstellen, indem man ein geeignetes Vielfaches der ersten Zeile zu den nachfolgenden Zeilen addiert, so dass in diesen Zeilen die Koeffizienten von x_1 verschwinden. Danach addiert man geeignete Vielfache der neuen zweiten Zeile zu den nachfolgenden Zeilen, so dass in diesen die Koeffizienten von x_2 verschwinden, und so weiter.

1.2 LR-Zerlegung

Mittels diesem Algorithmus wird die gegebene Matrix A in zwei Dreiecksmatrizen L (Linksdreiecksmatrix mit normierter Diagonale) und R (Rechtsdreiecksmatrix) überführt.

Beispiel:

$$
\begin{array}{ccc|ccc}
\multicolumn{3}{c|}{\begin{array}{c|c} & R \\ \hline L & A \end{array}} & \begin{array}{c} r_1 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} r_2 \\ r_4 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} r_3 \\ r_5 \\ r_6 \end{array} \\
\hline
1 & 0 & 0 & 2 & 6 & 18 \\
l_1 & 1 & 0 & 16 & 13 & 11 \\
l_2 & l_3 & 1 & 7 & 5 & 23
\end{array}
$$

Gegeben ist die Matrix A, gesucht sind die Elemente von L und R. Mit Hilfe des Schemas von Falk lassen sich Gleichungen aufstellen, um die Elemente dieser Dreiecksmatrizen zu errechnen.

$$
\begin{aligned}
1 \cdot r_1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 &= 2 & \qquad r_1 &= 2 \\
l_1 \cdot r_1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 &= 16 & \qquad l_1 &= 8 \\
&\cdots
\end{aligned}
$$

Aus $A \cdot x = b$ und $A = L \cdot R$ folgt $L \cdot R \cdot x = b$.
Mittels Substitution $R \cdot x = y$ lässt sich, bei gegebener Matrix L, y ausrechnen mit $L \cdot y = b$.
Damit und mit der Gleichung der Substitution $R \cdot x = y$ kann man die gesuchte Lösung x berechnen.

1.3 Cholesky-Zerlegung

Dieser Algorithmus ist nur anwendbar auf symmetrische, positiv definite Matrizen. Auf diese sind auch Gauß und LR-Zerlegung anwendbar, diese jedoch zerstören die Symmetrie der Matrix. Der Algorithmus von Choleky bedient sich dagegen der Symmetrie, indem er die gegebene Matrix A in die Rechtsdreiecksmatrix R und ihrer Transponierten R^T überführt.

Da gilt $A = R \cdot R^T$ kann man mit Hilfe der Summenformel

$$a_{jk} = \sum_{i=1}^{j} r_{ji}^T \cdot r_{ik}$$

Gleichungen aufstellen, die der Berechnung der Dreiecksmatrixelemente dienen. Da R^T der transponierten Matrix R entspricht, kann man r_{ji}^T (Zeile j, Spalte i) nach r_{ij} (Zeile i, Spalte j) umstellen.

Daraus ergibt sich die neue Summenformel:

$$a_{jk} = \sum_{i=1}^{j} r_{ij} \cdot r_{ik}$$

Diese Summenformel ist nichts weiter als das Skalarprodukt der einzelnen Spalten j und k von R. Mittels dieser Erkenntnis lassen sich einfach Gleichungen zur Berechnung der einzelnen Elemente der Rechtsdreiecksmatrix aufstellen.

Beispiel:

$$A = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 5 & 8 \\ 6 & 8 & 6 \end{vmatrix} \qquad R = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \end{vmatrix}$$

Mittels Skalarprodukt der Spalten j und k von R lassen sich Gleichungen aufstellen und die Elemente der Dreiecksmatrix berechnen:

$$r_{11} \cdot r_{11} + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 4 \qquad r_{11} = 2$$

$$r_{11} \cdot r_{12} + 0 \cdot r_{22} + 0 \cdot 0 = 2 \qquad r_{12} = 1$$

$$\ldots$$

Damit hat man ebenfalls die Elemente der transponierten Dreiecksmatrix R^T errechnet:

$$R^T = \begin{vmatrix} r_{11} & 0 & 0 \\ r_{12} & r_{22} & 0 \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} \end{vmatrix}$$

Aus $A \cdot x = b$ und $A = R \cdot R^T$ folgt $R \cdot R^T \cdot x = b$.
Mittels Substitution $R^T \cdot x = y$ lässt sich, bei gegebener Matrix R, y ausrechnen mit $R \cdot y = b$. Damit und mit der Gleichung der Substitution $R^T \cdot x = y$ kann man die gesuchte Lösung x berechnen.

2 Normen

Eine Norm ist eine Verallgemeinerung des Begriffs der Länge eines Vektors, sie wird auch als Distanzfunktion bezeichnet. Eine Norm ist also ein reeller Wert, der den Abstand eines Punktes vom Nullelement des jeweiligen Raumes darstellt.

2.1 Vektornorm

Definition:

Sei $V = \mathbb{R}^n$. Die Funktion $||.|| : V \to \mathbb{R}$ heißt Norm, wenn $\forall x, y \in V; \alpha \in \mathbb{R}$ gilt:

- $||x|| \geq 0; ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
  - Positivität
  - Der Wert für die Norm eines Vektors x ist immer größer 0. Der Abstand eines Punktes vom Nullelement kann nicht negativ sein.
- $||\alpha x|| = |\alpha| \cdot ||x||$
  - Homogenität
  - Die Norm von einem Vektor multipliziert mit einer skalaren Größe ändert den Wert der Norm, aber nicht ins Negative.
- $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$
  - Subadditivität (Dreiecksungleichung)
  - Die Summe der Abstände zweier Vektoren ist immer größer gleich dem Abstand der Summe der beiden Vektoren.

Es gibt unendlich viele Vorschriften zur Bildung einer Vektornorm:

$$||x||_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \qquad p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

Die Menge $\{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| \leq 1\}$ heißt Normkugel bezüglich der Norm $||.||$. Das heißt, alle Vektoren, deren Norm kleiner gleich 1 ist, werden zur Menge der Normkugel zusammengefasst.

Für $p = 1$ ergibt sich die Einsnorm (Summennorm):

$$||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

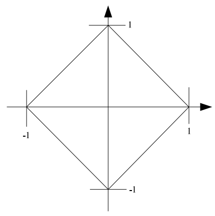

Abbildung 1: Normkugel der Summennorm

Für $p = 2$ ergibt sich die Zweinorm (Euklidische Norm):

$$||x||_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

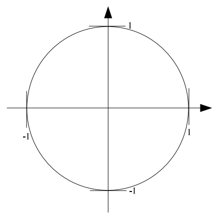

Abbildung 2: Normkugel der Euklidischen Norm

Für $p = \infty$ ergibt sich die Maximumsnorm:

$$||x||_\infty = \max_{i=1,\cdots,n} |x_i|$$

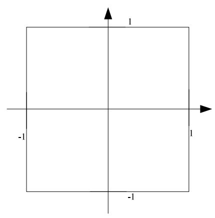

Abbildung 3: Normkugel der Maximumsnorm

2.2 Matrixnorm

Jede Norm in $\mathbb{R}^{n\times n}$ heißt Matrixnorm. Neben den Eigenschaften einer Vektornorm gilt:

- $||AB|| \leq ||A|| \cdot ||B||$
  - Submultiplikativität
- $||Ax|| \leq ||A|| \cdot ||x||$
  - Konsistenz

Zwei Beispiele für die Anwendung einer Matrixnorm, die häufig benutzt werden, sind die Zeilensummen- und die Spaltensummennorm.

Beispiel Zeilensummennorm:

$$||A||_\infty = \max_{i=1,\cdots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

Bei einer gegebenen Matrix

$$A = \begin{vmatrix} -4 & 7 & 6 \\ 2 & 5 & -8 \\ 1 & 7 & -3 \end{vmatrix}$$

wird für jede Zeile die Summe der Beträge aller Elemente der Zeile gebildet:

$$|-4| + |7| + |6| = 17$$

$$|2| + |5| + |-8| = 15$$

$$|1| + |7| + |-3| = 11$$

Der Zeilensummennorm enspricht dann dem Maximum der ausgerechneten Werte:

$$||A||_\infty = 17$$

Analog hierzu ergibt sich die Berechnung der Spaltensummennorm, nur für die Summe der Beträge aller Elemente der Spalten.

3 Fehler/Störungen in linearen Geichungssystemen

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit den Fehlern (sind im Folgenden dem Begriff Störungen gleichzusetzen), die in linearen Gleichungssystemen vorhanden sein können. Es wird sowohl der Frage nachgegangen, wie und warum es zu solchen Fehlern kommt, als auch geklärt, wie ein korrekte Angabe dieser Fehler aussieht.

3.1 Fehlerentstehung

Geht man von dem linearen Gleichungssystem $Ax = b$ aus, wobei x die gesuchte Lösung darstellt, so liegt es nahe, dass Fehler der linken Seite (der Matrix A) und/oder Störungen der rechten Seite (des Vektors b) zu einem Fehler im Lösungsvektor x führen.

Es sind mehrere Schritte notwendig, um ein Wirklichkeitsphänomen zu modellieren und numerisch zu simulieren. Während dieses gesamten Prozesses, der von einem Wirklichkeitsphänomen ausgeht und beim numerischen Ergebnis endet, entstehen Fehler. Dabei unterscheidet man vier Fehlertypen, die im Folgenden an einem Beispiel erläutern werden sollen:

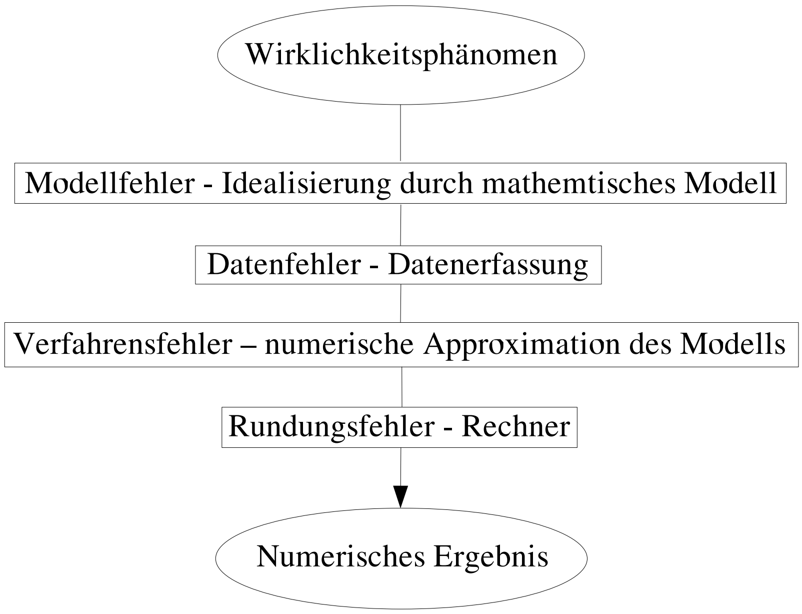

Abbildung 4: Fehlerentstehung

Als Beispiel soll die Aufgabenstellung dienen, bei einem Schaltkreis die unbekannten Ströme zu bestimmen.
Das heißt, man geht von dem Witklichkeitsphänomen 'Schaltkreis' aus und möchte als numerisches Ergebnis die Werte für die geforderten Ströme ermitteln.
Die ersten Fehler treten schon bei der mathematischen Modellbildung auf. Diese Fehler bezeichnet man deshalb auch als Modellfehler. Der Grund für ihr Auftreten liegt in der Tatsache, dass das verwendete mathematische Modell das zu untersuchende Wirk-

lichkeitsphänomen nur vereinfacht, das heißt idealisierend, beschreibt. In dem Beispiel des Schaltkreises ist dies dann der Fall, wenn die Widerstände der Verbindungsleitungen zwischen den einzelnen Bauelementen als vernachlässigbar klein angesehen und auf Null idealisiert werden.

Bei der Erfassung von rechenrelevanten Daten kommt es zu den Datenfehlern. Wenn man bei dem Schaltkreis eine Spannung misst, mit deren Hilfe dann die Ströme bestimmt werden sollen, so kann man dies erstens nur bis zu einer bestimmten Genauigkeit tun, die das Messgerät zulässt und zweitens kann man in diesem Zusammenhang Messfehler allgemein nie ausschließen.

Außerdem kann es während dieses Prozesses auch zu sogenannten Verfahrensfehlern kommen. Diese sind dadurch verursacht, dass das mathematische Modell durch eine numerisch handhabbare Annäherung ersetzt wird. In dem Beispiel heißt dies, dass das Verhalten bestimmter Bauelemente nicht vollständig korrekt mathematisch beschrieben werden kann.

Schließlich treten Rundungsfehler auf, die auf die begrenzte Anzahl von Stellen eines Rechners zurückzuführen sind.

3.2 Fehlerangabe

Bei einem linearen Gleichungssystem $Ax = b$ kann der Fehler in der Lösung x, der durch Fehler in A oder b verursacht wird, sowohl als absoluter Fehler, als auch als relativer Fehler angegeben werden.

Der absolute Fehler ist definiert als:

$$||\Delta x|| = ||x - \tilde{x}||$$

Der relative Fehler ist definiert als:

$$\frac{||\Delta x||}{||x||} = \frac{||x - \tilde{x}||}{||x||} \qquad \text{mit} \qquad x \neq 0$$

Der absolute Fehler ist definiert als die Norm von der Differenz aus x und $\tilde{x}$, wobei x die exakte Lösung und $\tilde{x}$ die Näherung für x darstellt. Die Differenz $x - \tilde{x}$ kann auch als Δx bezeichnet werden. Damit ist Δx die Fehlerabweichung.
Die Definition für den relativen Fehler ergibt sich analog, wobei zusätzlich durch die Norm von x dividiert wird.

Im Zusammenhang mit diesen Fehlerangaben kommt der Begriff der Normen wieder zum Tragen, der im Kapitel 2 eingeführt wurde.
Das dies sinnvoll ist, zeigt Folgendes:
Der absolute Fehler ergibt sich also aus der Differenz der Vektoren x und $\tilde{x}$. Wenn man zwei Vektoren subtrahiert, so ist das Ergebnis ebenfalls wieder ein Vektor. Da ein Vektor aber keinen Fehler repräsentieren kann, bedient man sich der Normen, in diesem Fall speziell der Vektornorm, die laut Definition auf Seite 4 jedem Vektor eine reelle Zahl zuordnet.

4 Konditionierung

In diesem Kapitel wird auf die Auswirkung der im vorherigen Kapitel beschriebenen Fehler auf die Lösung eingegangen. Dazu wird sowohl der Konditionsbegriff definiert, als auch der Begriff der Konditionszahl eingeführt. Desweiteren wird erläutert, wie man den Fehler in der Lösung abschätzen kann.

4.1 Konditionsbegriff

Unter dem Konditionsbegriff versteht man die Auswirkung kleiner Fehler in den Eingangsdaten auf die Genauigkeit der Lösung. Es ist zu beachten, dass die in Kapitel 3.1 erwähnten Rundungsfehler nicht unter diesem Konditionsbegriff fallen.

Ein einführendes Beispiel:

Es sei $Ax = b$ mit $A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1-\epsilon \end{vmatrix}$ und $b = \begin{vmatrix} 4 \\ 4-\epsilon \end{vmatrix}$ mit $\epsilon > 0$ (dennoch sehr klein) gegeben.

Es ist leicht nachzuvollziehen, dass $x = \begin{vmatrix} 3 \\ 1 \end{vmatrix}$ die einzige Lösung ist.

Nun soll eine kleine Störung der rechten Seite, das heißt von b, betrachtet werden.

Für das einseitig gestörte lineare Gleichungssystem $A\tilde{x} = \tilde{b}$ mit $\tilde{b} = \begin{vmatrix} 4+\epsilon \\ 4-2\epsilon \end{vmatrix}$ erhält man eine völlig andere Lösung, nämlich $\tilde{x} = \begin{vmatrix} 1+\epsilon \\ 3 \end{vmatrix}$.

Wenn man nun die Fehler der Störung und der Lösung etwas genauer betrachtet, so kann man etwas interessantes feststellen. Die absoluten Fehler ergeben sich laut Kapitel 3.2 wie folgt:

$$b - \tilde{b} = \begin{vmatrix} -\epsilon \\ \epsilon \end{vmatrix} \quad , \quad ||b - \tilde{b}||_\infty = \epsilon$$

und

$$x - \tilde{x} = \begin{vmatrix} 2-\epsilon \\ -2 \end{vmatrix} \quad , \quad ||x - \tilde{x}||_\infty = 2$$

Lässt man nun die Störung ϵ immer kleiner werden (sogar $\epsilon \to 0$), so bleibt der Fehler in der Lösung dennoch konstant. In diesem Fall spricht man von einem schlecht konditionierten Gleichungssystem. Das heißt, dass kleine Änderungen in den Eingangsdaten zu großen Abweichungen in der Lösung führen.

4.2 Konditionszahl

Wie das vorherige Kapitel verdeutlicht hat, gibt es Gleichungssysteme die störungsempfindlicher sind, als andere. Um nun ein Maß für diese Störungsempfindlichkeit zu haben, führt man die Konditionszahl ein. Diese ergibt sich für alle regulären Matrizen aus dem Produkt der Norm dieser Matrix und der Norm ihrer Inversen.

Definition Konditionszahl:
Für alle $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, A regulär, ist $\kappa(A) = ||A|| \cdot ||A^{-1}||$ die zu A gehörige Konditionszahl.

Da die Norm der Einheitsmatrix immer eins ist, das Produkt einer Matrix und ihrer Inversen die Einheitsmatrix ergibt und Normen die Eigenschaft der Submultiplikativität besitzen (siehe Kapitel 2), kommt man zu folgender Aussage:

Wegen $1 = ||E|| = ||AA^{-1}|| \leq ||A|| \cdot ||A^{-1}|| = \kappa(A)$ gilt $\kappa(A) \geq 1$.

Generell kann man sagen, dass man bei einer kleinen Konditionszahl von einem gut konditionierten Gleichungssystem spricht und bei einer großen Konditionszahl vom Gegenteil.

4.3 Konditionsabschätzung

Im folgenden soll eine Ungleichung hergeleitet werden, mit der es möglich ist, den absoluten und relativen Fehler der Lösung x abzuschätzen.

Ziel: $||\Delta x|| \leq ...$ und $\frac{||\Delta x||}{||x||} \leq ...$

$$
\begin{aligned}
\tilde{A}\tilde{x} &= \tilde{b} \qquad (1)\\
(A+\Delta A)(x+\Delta x) &= b + \Delta b\\
Ax + A\Delta x + \Delta A x + \Delta A \Delta x &= b + \Delta b \qquad (2)\\
A\Delta x + \Delta A x + \Delta A \Delta x &= \Delta b\\
A\Delta x &= -\Delta A x - \Delta A \Delta x + \Delta b\\
\Delta x &= -A^{-1}[\Delta A x + \Delta A \Delta x - \Delta b] \qquad (3)\\
||\Delta x|| &\leq ||A^{-1}||(||\Delta A|| \cdot ||x|| + ||\Delta A|| \cdot ||\Delta x|| + ||\Delta b||)\\
||\Delta x|| &\leq ||A^{-1}||(||\Delta A|| \cdot ||x|| + ||\Delta b||) + ||A^{-1}|| \cdot ||\Delta A|| \cdot ||\Delta x||\\
||\Delta x|| - ||A^{-1}|| \cdot ||\Delta A|| \cdot ||\Delta x|| &\leq ||A^{-1}||(||\Delta A|| \cdot ||x|| + ||\Delta b||)\\
(1 - ||A^{-1}|| \cdot ||\Delta A||)||\Delta x|| &\leq ||A^{-1}||(||\Delta A|| \cdot ||x|| + ||\Delta b||)\\
||\Delta x|| &\leq \frac{||A^{-1}||}{1 - ||A^{-1}|| \cdot ||\Delta A||} \cdot (||\Delta A|| \cdot ||x|| + ||\Delta b||)
\end{aligned}
$$

Eine Abschätzung für einen Fehler von x ist nur dann sinnvoll, wenn x kein Element der rechten Seite der Ungleichung darstellt. Es folgt also mit $||x|| \leq ||A^{-1}|| \cdot ||b||$ (4)

$$||\Delta x|| \leq \frac{||A^{-1}||}{1 - ||A^{-1}|| \cdot ||\Delta A||} \cdot (||\Delta A|| \cdot ||A^{-1}|| \cdot ||b|| + ||\Delta b||)$$

(1) $\tilde{A} = A + \Delta A \quad \tilde{x} = x + \Delta x \quad \tilde{b} = b + \Delta b$
(2) $Ax = b$
(3) wegen der Eigenschaft der Positivität von Normen: $||-A|| = ||A||$
wegen der Eigenschaft der Submultiplikativität von Normen: $= \quad \Rightarrow \quad \leq$
(4) $Ax = b \quad \Rightarrow \quad x = A^{-1} \cdot b$
wegen der Eigenschaft der Submultiplikativität von Normen: $||x|| \leq ||A^{-1}|| \cdot ||b||$

Die Abschätzung für den relativen Fehler ergibt sich ziemlich einfach aus der eben hergeleiteten Ungleichung für den absoluten Fehler, indem man durch die Norm von x dividiert. Es folgt also aus

$$||\Delta x|| \leq \frac{||A^{-1}||}{1 - ||A^{-1}|| \cdot ||\Delta A||} \cdot (||\Delta A|| \cdot ||A^{-1}|| \cdot ||b|| + ||\Delta b||)$$

mit $||x|| \leq ||A^{-1}|| \cdot ||b||$ (4)

$$\frac{||\Delta x||}{||x||} \leq \frac{||A|| \cdot ||A^{-1}||}{1 - ||A^{-1}|| \cdot ||\Delta A||} \cdot \frac{||\Delta A|| \cdot ||A^{-1}|| \cdot ||b|| + ||\Delta b||}{||b||}$$

Es folgt hieraus mit $\kappa(A) = ||A|| \cdot ||A^{-1}||$

$$\frac{||\Delta x||}{||x||} \leq \frac{\kappa(A)}{1 - ||A^{-1}|| \cdot ||\Delta A||} \cdot ||\Delta A|| \cdot ||A^{-1}|| + \frac{||\Delta b||}{||b||}$$

Glossar

Dreiecksmatrix	Alle Elemente oberhalb (Rechts˜) bzw. unterhalb (Links˜) der Hauptdiagonalen sind Null.
erweiterte Matrix	Die Matrix A wird in linearen Gleichungssystemen $Ax = b$ um den Vektor b erweitert.
Hauptminoren	Die Determinanten der linken oberen Teilmatrizen, die durch Streichung der rechtesten Spalten und untersten Zeilen entstehen, heißen Hauptminoren.
normierte Diagonale	Alle Elemente der Hauptdiagonalen sind eins.
positiv definit	Die symmetrische Matrix A ist genau dann positiv definit, wenn alle Hauptminoren von A positiv sind.
symmetrische Matrix	Alle Elemente liegen spiegelsymmetrisch zur Hauptdiagonalen.
transponierte Matrix	Vertauscht man Zeilen und Spalten einer Matrix A, so erhält man die transponierte Matrix A^T.

Abbildungsverzeichnis

Literatur

[1] FRANZ LOCHER: *NUMERISCHE MATHEMATIK FÜR INFORMATIKER*, SPRINGER-VERLAG, BERLIN 1992

[2] BÖHM/GOSE/KAHMANN: *METHODEN DER NUMERISCHEN MATHEMATIK*, FRIEDR. VIEWEG SOHN, BRAUNSCHWEIG 1985

[3] AXEL KLAR: *EINFÜHRUNG IN DIE NUMERIK*, SKRIPTUM, TU DARMSTADT 2003
http://www.mathematik.tu-darmstadt.de/ags/ag8/Lehrveranstaltungen/numalg

[4] ULLRICH TROTTENBERG: *NUMERISCHE MATHEMATIK I*, UNI KÖLN 2003