BERUFSAKADEMIE | MANNHEIM
university of cooperative education | staatliche studienakademie

REFERAT FÜR
INNOVATIVE ARCHIKETUREN

THEMA
CHAOSTHEORIE

REFERENTEN
TIMO BÖLLINGER & DOMINIC ECKART

DATUM
9. NOVEMBER 2004

FACHRICHTUNG
INFORMATIONSTECHNIK
NETZWERK UND SOFTWARETECHNIK
AN DER BERUFSAKADEMIE MANNHEIM

Inhaltsverzeichnis

1. Was versteht man unter Chaostheorie

Unter der Chaos-Theorie versteht man die Theorie des deterministischen Chaos oder die Theorie Nichtlinearer Dynamischer Systeme, einem Teilgebiet der nichtlinearen Dynamik innerhalb von Mathematik und Physik. Sie geht u.a. auf die Arbeiten von Henri Poincaré, Edward N. Lorenz, Mitchell Feigenbaum und Benoit Mandelbrot zurück. Chaotisches Verhalten äußert sich dadurch, dass schon geringste Änderungen der Anfangsbedingungen zu sehr unterschiedlichen Ergebnissen führen können (Schmetterlingseffekt). Systeme, die chaotisches Verhalten zeigen, sind zum Beispiel:

- Wetter und Klima
- Plattentektonik
- Turbulenz
- Wirtschaftskreisläufe
- Internet
- Bevölkerungswachstum

Merkmale chaotischer Systeme sind:

- Irreguläre Bewegung
- Begrenzte Vorhersagbarkeit
- Selbstähnlichkeit

2. Bedeutende Namen der Chaostheorie

2.1. Benoit B. Mandelbrot


Quelle: http://domino.research.ibm.com

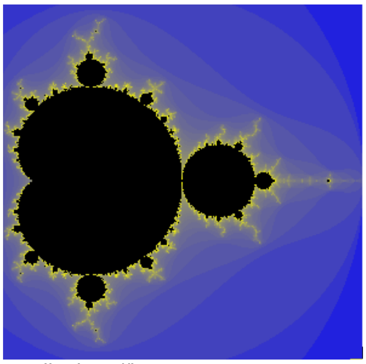
Der französische Mathematiker wurde am 20.11.1924 in Warschau, Polen, geboren. Er besuchte Universitäten in Frankreich und den USA und erlangte 1952 seinen Doktortitel an der Universität von Paris.

Werdegang:

- Wirtschaftswissenschaften in Harvard
- Technik in Yale
- Physiologie am Albert Einstein College of Medicine
- Mathematik in Paris und Genf
- 1958 arbeitete er als IBM-Fellow[1] am Thomas B. Watson Research Center in New York.

Er entwickelte die Geometrie der Fraktale zu einen separaten Zweig der Mathematik. Die fraktale Geometrie unterscheidet sich durch eine abstraktere Behandlung der Dimension von der herkömmlichen Geometrie. Sie wird in wachsendem Maß auf vielen verschiedenen Gebieten der Wissenschaft und Technik angewandt.

Die nach ihm benannte Mandelbrot-Menge kann mit Hilfe von Computern visualisiert werden (Mandelbrotberechnung, auch bekannt als „Apfelmännchen“)


Quelle: http://hem.passagen.se

[1] Ein IBM Fellow ist eine hervorgehobene Person. Der Titel geht auf Thomas J. Watson, Jr. zurück, seit 1962 erhalten pro Jahr 4 bis 5 Personen diesen höchsten Ehrentitel, im Technologie-Bereich, bei IBM.
Quelle: http://www.wordiq.com/definition/IBM_Fellow

2.2. Jules Henri Poincaré

Quelle: http://finanz.math.tu-graz.ac.at

Der französischische Mathematiker und theoretische Physiker Jules Henri Poincaré wurde am 29.04.1854 in Nancy geboren und verstarb am 17.07.1912 in Paris.
Werdegang:

- 1879 Promotion in Caën
- 1881-1912 Ordinarius für mathematische Physik an der Sorbonne in Paris
- 1887 Mitglied der Akademie der Wissenschaften
- 1906 Präsident der Akademie der Wissenschaften
- 1909 Mitglied der Académie française

Poincaré lieferte grundlegende Beiträge zu den unterschiedlichsten Teilgebieten der Mathematik. Ein wesentlicher Beitrag zur Entwicklung der speziellen Relativitätstheorie war seine Arbeit über die Dynamik der Elektronen (1906). Er veröffentlichte etwa 250 Werke, z.B. den Gebieten Topologie (Poincaré-Vermutung), Funktionentheorie, Differentialgleichungen, Wahrscheinlichkeitstheorie, Chaostheorie, Optik, Himmelsmechanik, Elektromagnetismus und Relativitätstheorie. In seinen Arbeiten hinterfragte er bereits erbrachte Beweise wie die Lagrange- und Laplace-Theorie.
Henri Poincare beschäftigte sich als Erster mit dem Prinzip von Chaos in deterministischen Systemen, diese Arbeit erhielt aber erst viel später, 1963, die Anerkennung der wissenschaftlichen Welt.
Neben seinen wissenschaftlichen Arbeiten, verfasste er auch diverse populär wissenschaftliche Werke wie "Science and Method" und "The Value of Science".

2.3. Mitchell Feigenbaum

Quelle: http://www.williamcoupon.com

Der amerikanische Physiker Mitchell Feigenbaum erkannte bestimmte übereinstimmende Muster in chaotischen Systemen, woraus er Kenngrößen ableitete, die man heute Feigenbaum-Konstanten nennt. Diese werden mit der Geometrie der Fraktale in Zusammenhang gebracht.
Entwickler des einfachsten chaotischen Systems (Feigenbaum Szenario).

2.4. Edward N. Lorenz

Quelle: http://www-paoc.mit.edu

Der Meteorologe war Professor am MIT (Massachusetts Institute of Technology).
1963 entdeckte er durch vermeintlich fehlerhafte Computerauswertungen von Wetterdaten den sogenannten Schmetterlingseffekt.

3. Bedeutende Begriffe der Chaostheorie

3.1. Selbstähnlichkeit

Der Begriff Selbstähnlichkeit beschreibt die Eigenschaft eines Objektes, wonach ein kleiner Ausschnitt dem gesamten Objekt ähnelt. Beispielsweise ähnelt die Struktur eines vergrößerten Ausschnittes eines Berggipfels dem gesamten Gebirge selbst, während sich der Ausschnitt einer Kugeloberfläche bei starker Vergrößerung immer weiter einer Fläche nähert.
Ein Gebilde wird selbstähnlich oder skaleninvariant genannt, wenn ein Teil ähnlich dem Gesamtobjekt ist. Eine erstaunliche Konsequenz der Selbstähnlichkeit stellt die Tatsache dar, dass sich ein Teil von der Gesamtfigur nur in der Größe unterscheidet, egal wie stark man diesen verkleinert. Beim „hineinzoomen“ in eine selbstähnliche Figur findet sich unbegrenzt immer wieder die selbe Struktur.
Eine triviale Ausnahme stellt eine einfache Strecke dar, die bei Verkleinerung ebenfalls in einen Teil von sich selbst übergeht, also auch selbstähnlich ist.
Es lässt sich also auch in einem „chaotischen“ System eine gewisse Ordnung feststellen.

3.2. Fraktale

Um komplexere Gebilde als Geraden, Kreise, Würfel oder Kugeln zu beschreiben bedarf es einer besonderen Geometrie. Benoit B. Mandelbrot hat dazu die Begriffe "Fraktal" und "fraktale Geometrie" in den siebziger Jahren eingeführt.
In der Natur kommen häufig Formen vor, die sich mit Hilfe fraktaler Geometrien beschreiben lassen, wie z.B. Berge oder Küstenlinien.
Beispiele für künstliche Fraktale sind das sogenannte Sierpinski-Dreieck oder die Mandelbrotmenge.
Fraktale sind wie andere Formen oder Gebilde definierte Mengen im n-dimensionalen metrischen Raum, jedoch muss bei der mathematischen Behandlung von einer fraktalen Dimension ausgegangen werden.
Die Hausdorff-Dimension eines Fraktals ist stets größer als ihre topologische Dimension. Die topologische Dimension entspricht der Anzahl der für die Parameter-

darstellung der Kurve benötigte Variablen und kann nur ganzzahlige Werte annehmen („normale Geometrie“), während die Hausdorff-Dimension D (oder fraktale Dimension) beliebige positive reelle Werte annehmen kann. Man spricht daher auch von gebrochenen Dimensionen.
Intuitiv betrachtet kann D als Meßzahl für die "Komplexität" bzw. "Rauheit" der Kurve aufgefasst werden. Beispielsweise erscheint ein Fraktal der Dimension D = 1,125 "einfacher" und "glatter" als ein Fraktal der Dimension D = 1,837.

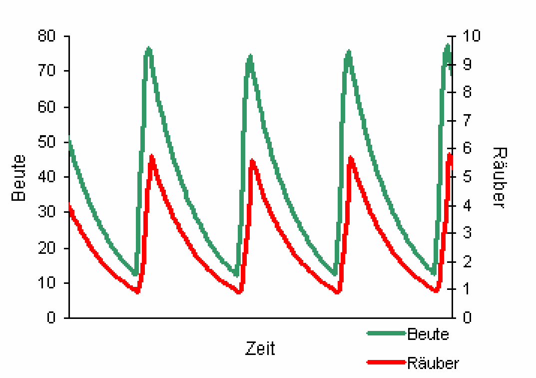
Man unterscheidet zwischen deterministischen und stochastischen Fraktalen. Bei stochastischen Fraktalen wird der Generierungsprozess durch „zufällige“ Schwankungen mitbestimmt, während deterministische Fraktale (wie z.B. das Sierpinski-Dreieck) eine sehr reguläre Struktur aufweisen.
Allen Fraktalen gleich ist ihre interessanteste Eigenschaft, ihre Vergrößerungsinvarianz, also die Tatsache, dass ein Fraktal unabhängig von der Vergrößerungsstufe stets die gleiche Struktur aufweist (Selbstähnlichkeit).
Da Selbstähnlichkeit auch in der Natur häufig vorkommt (Pflanzen, Küstenlinien, Berge, Wolken etc.), sind stochastische Fraktale besonders gut für die künstliche Genierung von komplexen Naturszenen, sowie für die Modellierung von Naturvorgängen geeignet. Fraktale haben ebenfalls eine Bedeutung bei der fraktalen Kompression (Komprimierung von Dateien).
Fraktale werden zwar in der Regel sehr einfach definiert und nur durch kleine Datenmengen beschrieben, allerdings erfordert die hohe Anzahl der iterativ auf die anfallenden Daten angewandte Definitionsvorschrift einen enormen Rechenaufwand. Deshalb wurden die bereits 1875-1925 entdeckten und beschriebenen Fraktale auch erst durch moderne Computeranlagen visualisiert und populär.

3.3. Phasenraum

Der Phasenraum wird von zeitlich veränderlichen Variablen, die zu einem System von Differentialgleichungen (DGL) und ihren zeitlichen Ableitungen gehören, aufgespannt.

Die grafische Darstellung nennt man Phasenraumportrait oder einfach Phasenportrait. Das Phasenraumportrait kann zur graphisch Lösung dieser Funktionen verwendet werden, ohne die eigentliche Lösungsfunktion der DGL's und deren Ableitungen zu kennen. Das Phasenportrait kann nicht die rechnerische Lösung des Systems ersetzen, bietet aber für bestimmte Fragestellungen eine Lösung. Aus der Darstellung können Eigenschaften wie Stabilität oder die Gleichgewichtspunkte abgelesen werden, aber auch die Kritischen Punkte. Diese spielen eine sehr wichtige Rolle, denn an diesen Punkten sind alle zeitlichen Ableitungen null. Wenn man nun die DGL's um die Kritischen Punkte linearisiert, kann das Verhalten der DGL's um die Punkte näher betrachtet werden. Dieses Verfahren wird allgemein als lineare Stabilitätsanalyse bezeichnet.

Mathematisch lässt sich beweisen, dass die Punkte im Phasenraum das durch die DGL's und die Ableitung aufgespannte System eindeutig charakterisieren.



Quelle: http://de.wikipedia.org

Gerade im Bereichen, in denen mit komplexen Systemen gearbeitet wird, hat der Phasenraum eine hohe Bedeutung erlangt. Ein Beispiel für die Anwendung ist zum Beispiel in der Biologie, das Räuber-Beute-Modell. Dieses spiegelt die Populationsbestände wieder.

Andere Beispiele kommen z.B. aus der Physik: dort werden Phasenraumportraits überwiegend um die Entwicklung von Systemen (Oszillatoren, Entropie[2] von Vielteilchensystemen) zu veranschaulichen.

[2] Die **Entropie** (zu altgr. *entrépein*, "umkehren") ist ein Maß für die Unordnung oder Zufälligkeit eines Systems (Quelle: de.wikipedia.org)

3.4. Attraktor

Ein Attraktor ist eine klar erkennbare Struktur in einem Phasenraum. Dieser zeigt die Zustände, auf die sich ein System im Laufe der Zeit hinbewegt.

Die Attraktoren können in zwei Gruppen aufgeteilt werden:

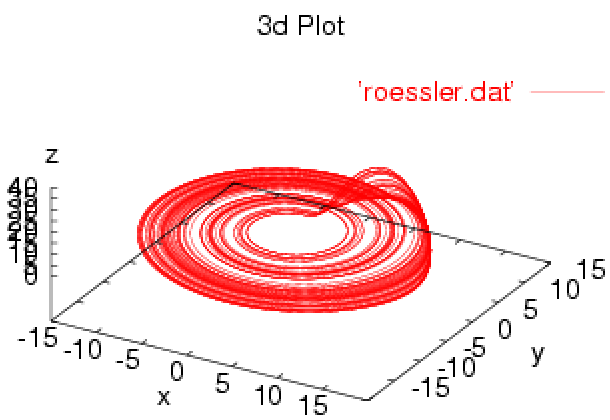
- Attraktoren mit ganzzahliger Dimension: Diese beschreiben nichtchaotische Systeme. (Punkt-Attraktoren, Grenzzyklen)
- Attraktoren mit nicht ganzzahliger Dimension: Diese beschreiben oft chaotische Systeme: sie werden auch „seltsame Attraktoren" genannt. Zwei Beispiele für Seltsame Attraktoren sind die von Lorenz und Rössler.

3.4.1. Rössler-Attraktor

Der Rössler-Attraktor ist nach Prof. Dr. Otto E. Rössler genannt. Er lehrt am Institut für Physikalische und Theoretische Chemie in Tübingen.
Der Attraktor ist durch das folgende Differentialgleichungssystem definiert:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= -(Y+Z) \\ \dot{Y} &= X + aY \\ \dot{Z} &= b + XZ - cX \end{aligned}$$

Die numerische Lösung sieht für Parameter a=0.15, b=0.20, c=10.0, 10000 Schritte, dt=0.5, so aus:



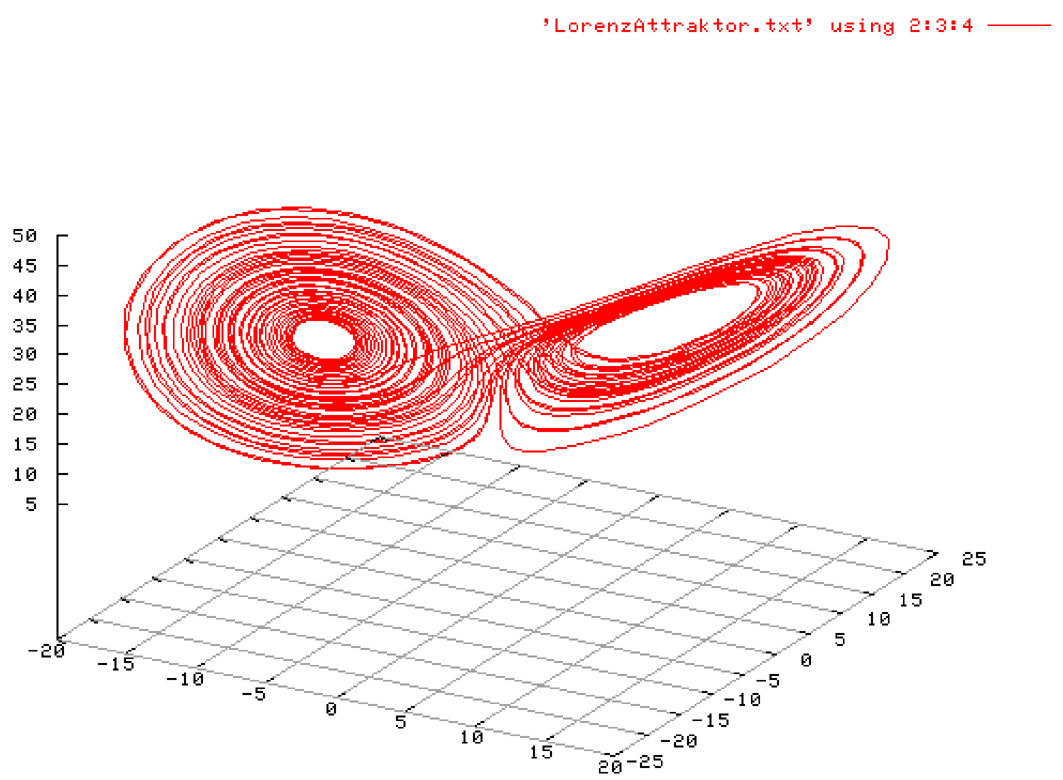
Quelle: de.wikipedia.org

3.4.2. Lorenz-Attraktor

Der Lorenz-Attraktor wurde nach dem Meteorologen Edward N. Lorenz genannt. Er dient zur Lösung eines Systems von drei gekoppelten, nichtlinearen Differenzialgleichungen.
Als einfaches Modell zur Lösung von Konvektionsströmungen in der Erdatmosphäre wurde dieses Modell von Edward N. Lorenz erstellt. Im Laufe der Zeit hat sich herausgestellt, dass dieses Verfahren auch im Bereich der Modellierung von Lasern eingesetzt werden kann. In der numerischen Lösung des betrachteten Systems erkennt man ein bestimmtes chaotisches Verhalten der Parameter.

$$\begin{aligned} dx/dt &= a(y-x) \\ dy/dt &= x(b-z)-y \\ dz/dt &= xy-cz \end{aligned}$$

Wie schon beim Rössler-Aktraktor wird das Runge-Kutta-Verfahren zur numerischen Lösung herangezogen. In der folgenden 3D-Grafik sind die gezeichneten Ergebnisse einer solchen Berechnung abgebildet.



Quelle: de.wikipedia.org

3.5. Schmetterlingseffekt

Der Schmetterlingseffekt ist eine zufällige Entdeckung des Meteorologen Edward Lorenz, der 1963 Wetterdaten mit dem Computer berechnete um Vorhersagen zu erstellen. Er rundete die Werte auf drei Stellen hinter dem Komma, da die Maschinen dieser Zeit noch sehr langsam arbeiteten. Lorenz misstraute den erhaltenen Ergebnissen, nicht zuletzt weil die Computer auch unzuverlässig arbeiteten. So gab er als Startmenge nicht die Daten des Vortages, sondern Zwischenwerte ein, berechnete damit also einen gewissen Zeitraum doppelt. Lorenz überlegte sich, dass ein Fehler vorliegen musste, wenn die doppelt berechneten Szenarien voneinander abweichen würden. Die beiden Kurven hatten in der Tat nichts mehr gemeinsam.

Als Lorenz die gleichen Anfangswerte eingab, stellte er überrascht fest, dass der Computer identische Ergebnisse lieferte, also in Ordnung sein musste. Bald fand er heraus, dass der Computer mit mehreren Stellen hinter dem Komma rechnete als er eingegeben hatte.

Dieser Unterschied von einem hundertstel Prozent hatte die Vorhersage komplett durcheinander gebracht, obwohl es nur einem zusätzlichen leichten Windhauch entsprach! Also konnte der Flügelschlag eines Schmetterlings theoretisch einen Orkan auslösen.

So ging dieses Phänomen als "Schmetterlingseffekt" in die Wissenschaftsgeschichte ein.

4. Beispiele

4.1. Mandelbrotmenge

Wie bereits weiter oben erwähnt, wird die Mandelbrotmenge umgangssprachlich auch "Apfelmännchen" genannt. Diese Menge geht auf Benoit Mandelbrot zurück, der dieses Fraktal im Jahre 1980 entdeckte. Die Mandelbrot-Menge spielt auch heute noch eine wichtige Rolle in der Chaostheorie.
Es ist wohl nicht übertrieben wenn man behauptet, dass die Mandelbromenge die höchste geometrische Formenvielfalt besitzt. Diese Aussage lässt sich relativ einfach veranschaulichen, indem man dem Kritiker den Rand näher bringt.

Das Anwendungsgebiet der Mandelbrotmenge:
Die Mandelbrotmenge wird im Zusammenhang mit der Julia-Menge eingesetzt, sie ist genauer gesagt die beschränkte Form der Julia-Menge, da ihr Anfangswert auf $z_0 = 0$ gesetzt wir.
Die Julia- bzw. Mandelbrot- Menge hat folgendes Bildungsgesetz für die Zahlenfolge $z_0, z_1, ..., z_n$:

$$z_{n+1} = z_n{}^2 + c \qquad c \in C$$

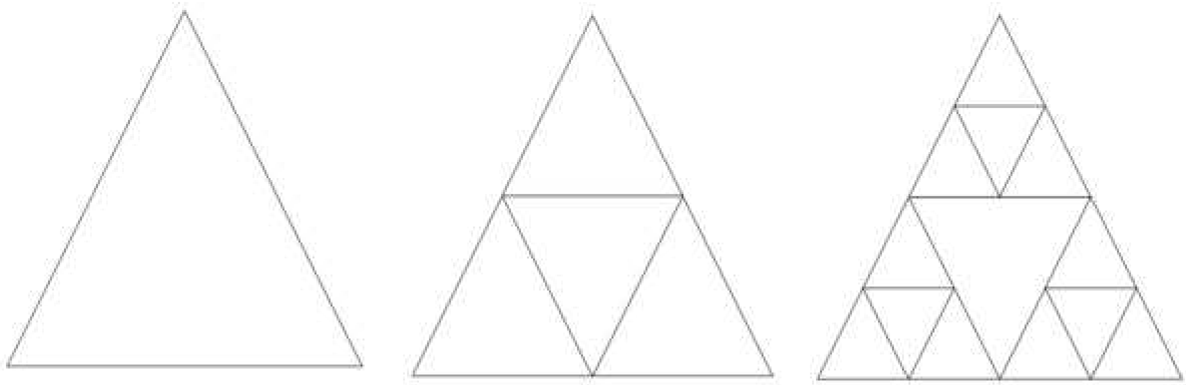
Die grafische Darstellung erfolgt in einer komplexen Ebene, wobei ein Punkt der Mandelbrotmenge schwarz gezeichnet wird. Die anderen Punkte werden je nach ihrem Divergenzgrad mit unterschiedlichen Farben gezeichnet.
Jeder Punkt c in der komplexen Ebene entspricht einer Julia-Menge. Über die Position des Punktes c im komplexen Raum und im Bezug auf die Mandelbrotmenge kann nun auf die Eigenschaften der Julia-Menge geschlossen werden:

- Ist c ein Teil der Mandelbrot-Menge, so ist die Julia-Menge zusammenhängend.
- Ist dies nicht der Fall, so ist die Julia-Menge eine Cantormenge[3] unzusammenhängender Punkte.
- Ist c am Rand der Mandelbrotmenge, so ist die Juliamenge in kleinen Umgebungen um c der Mandelbrot-Menge ähnlich.

[3] „Unter einer **Cantor-Menge**, auch **Cantor-Staub** oder **Wischmenge** genannt, versteht man eine **Menge**, die **überabzählbar** unendlich viele Elemente enthält, gleichzeitig aber ein Maß von Null (im Sinne des Riemannschen Integrals) besitzt." Quelle: http://www.adlexikon.de/Cantor-Menge.shtml

4.2. Sierpinski-Dreieck

Das Sierpinski-Dreieck wurde nach dem polnischen Mathematiker Waclaw Sierpinski (*1882 - †1969) genannt. Es wird in das Gebiet der Fraktalen-Geometrie eingeordnet.
Man kann das Dreieck auf verschiedenste Weisen konstruieren, auch die Dimension ist beliebig. In diesem Referat beschränken wir uns auf eine Konstruktion in der zweiten Dimension.
Die Grundlage bildet ein gleichseitiges Dreieck, in diesem werden einfach die Seitenmittelpunkte bestimmt und anschließend mit Linien verbunden. Das Verfahren wird nun wiederum auf die drei äußeren der insgesamt vier entstanden Dreiecke angewendet. Dieses Verfahren kann beliebig oft durchgeführt werden.
Theoretisch gesehen erhält man als Ergebnis eine Figur von endlicher Fläche, die aber einen Umfang von unendlicher Länge hat.
Das Sierpinski-Dreieck hat die gebrochene Dimension von 1,2618 und erscheint dadurch einfach und glatt.



Schritt 1 ... Schritt 2 ... Schritt 3 ...

Quelle: http://www.jjam.de

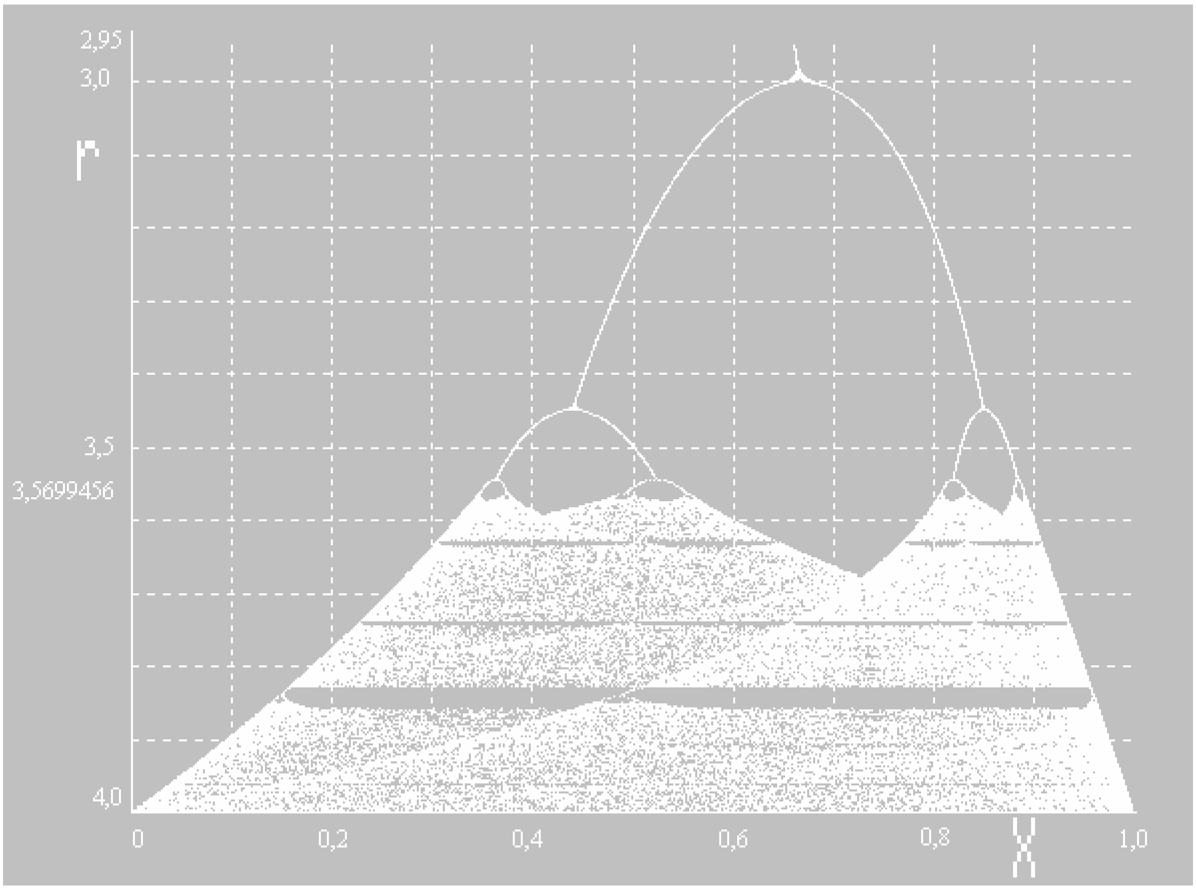
4.3. Feigenbaum Szenario

Eines der einfachsten und bekanntesten Systeme der Chaosforschung ist das Feigenbaumszenario, das durch folgende Formel beschrieben wird:

$X_{(t+1)} = X_{(t)} r(1 - X_{(t)})$

Der Parameter t repräsentiert einen Zeitpunkt, der Parameter r kann frei gewählt werden.

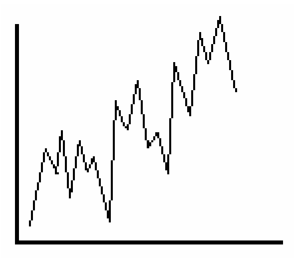
Das Feigenbaumszenario zeigt eindrucksvoll den Übergang von einem deterministischen Zustand in einen chaotischen, unvorhersagbaren Zustand eines Systems.
Ob die Lösung determiniert hängt allein von der Wahl des Parameters r ab! Wird dieser größer als 3,5699456... gewählt, springt die Lösung völlig unvorhersagbar zwischen den Extremwerten 0 und 1 hin und her (unterer Teil der Abbildung).



Quelle: http://users.math.uni-potsdam.de

4.4. Mephisto Walzer

Ein Experiment der Uni Potsdam zeigt beeindruckend, dass durchaus auch „Ordnung im Chaos“ gefunden werden kann.



Die Abbildung zeigt die kontinuierliche Signalreihe eines Experiments mit einem Wasserboiler.
Es kann eine Mittelwertfunktion gebildet werden. Darauf wird ein neues Verfahren angewandt, welches die Zeitreihe in eine Zeichenfolge umwandelt:
Liegt ein Messwert über dem berechneten Mittelwert wird eine 1 gesetzt, liegt ein Wert darunter eine 0.
Für das durchgeführte Experiment erhält man eine erstaunliche Folge:

0110100110010110...

Wird die erhaltene Zeichenfolge nun auf innere Symmetrien und Gesetzmäßigkeiten untersucht, stellt man Folgendes fest:
Auf die erste 0 folgt eine 1, auf das Paket 01 folgt 10, auf die ersten vier Zeichen 0110 folgt wiederum die Negation 1001 usw.

Diese Zeichenfolge wird auch mit dem prosaischen Namen "Mephisto-Walzer" betitelt: "...der Geist, der stets verneint."

5. Fazit

Die Chaostheorie hat in weiten Bereichen der Wissenschaft Einzug erhalten, da viele Probleme sich nicht durch einfache mathematische oder physikalische Modelle abbilden lassen. Die vorgestellten Methoden zeigen grundlegende Ansätze, die dann auf die jeweiligen Problemstellungen angepasst werden müssen. Dadurch können „chaotische“ Systeme wie z.B.:

- Wetter und Klima
- Plattentektonik
- Turbulenz
- Wirtschaftskreisläufe
- Internet
- Populationswachstum
- Herzrhythmusstörungen
- Modellierung unregelmäßiger Naturformen

in mathematisch fassbare Systeme überführt und/oder berechnet werden.
Die Chaostheorie erlangte zunehmend durch die Weiterentwicklung leistungsfähigerer Computersysteme an Relevanz. Erst Computer versetzten die Wissenschaftler in die Lage die rechenintensiven Nichtlinearen Dynamischen Systeme zu berechnen.

6. Literaturverzeichnis

http://www.bbsiiol-schule.kwe.de/projekte/chaos/chaos.htm
http://www.uni-protokolle.de/Lexikon/Chaostheorie.html
http://de.wikipedia.org/wiki/Chaostheorie
http://de.wikipedia.org/wiki/Nichtlineares_System
http://de.wikipedia.org/wiki/Edward_N._Lorenz
http://de.wikipedia.org/wiki/Benoit_Mandelbrot
http://de.wikipedia.org/wiki/Phasenraum
http://users.math.uni-potsdam.de/~oeitner/EIGENES/ZUMCHAOS/chaosvor.htm
http://www.quarks.de/dyn/3867.phtml